

Exercice 1

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe :

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

1. Calculer l'image de $-1 + i\sqrt{3}$ par la fonction f .
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$.
3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z .
Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées (non réelles).
4. Soit z un nombre complexe tel que $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.
(a) Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est :

$$x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y).$$

- (b) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z)$ soit un nombre réel.

Exercice 2

On désigne par (E) l'équation suivante d'inconnue complexe z :

$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0.$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$.
2. On désigne par a le nombre complexe défini par $a = 1 + i\sqrt{3}$.
(a) Calculer a^2 sous forme algébrique.
(b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$.
3. (a) Démontrer que si z est une solution de l'équation (E) , alors son conjugué $\bar{z}$ est également une solution de (E) .
(b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) . On admettra que (E) admet au plus quatre solutions.