Correction Exercice 1 (Probabilités et Suites)

1. (a) **Calcul de $P(N)$:** Le tirage est simultané, il s'agit donc de combinaisons. Le sac contient 10 boules (1 noire, 9 blanches). On en tire 4.

   Le nombre total de tirages possibles est $\binom{10}{4} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$.

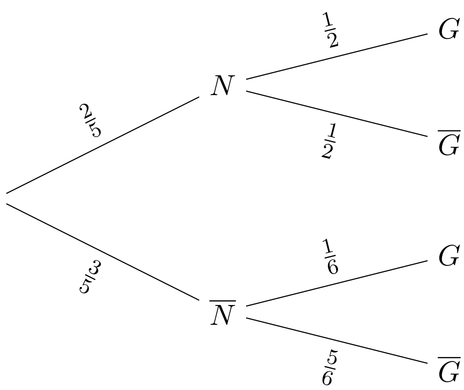
   L'évènement N « la boule noire figure parmi les boules tirées » est réalisé si l'on tire la boule noire (1 choix) et 3 boules blanches parmi les 9 (choix $\binom{9}{3}$).

   Nombre de cas favorables : $\binom{1}{1} \times \binom{9}{3} = 1 \times \dfrac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$.

$$P(N) = \frac{84}{210} = \frac{2}{5}.$$

   (b) **Arbre pondéré :**

   - $P(N) = \frac{2}{5} = 0,4$ et donc $P(\overline{N}) = 1 - 0,4 = 0,6$.
   - Si N est réalisé, on gagne (G) avec un nombre pair (2, 4, 6) sur le dé. Il y a 3 nombres pairs sur 6. Donc $P_N(G) = \frac{3}{6} = 0,5$.
   - Si $\overline{N}$ est réalisé, on gagne (G) avec un 6. Donc $P_{\overline{N}}(G) = \frac{1}{6}$.



   (c) **Probabilité de G :** Les évènements N et $\overline{N}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(G) = P(N \cap G) + P(\overline{N} \cap G) = P_N(G) \times P(N) + P_{\overline{N}}(G) \times P(\overline{N})$$

$$P(G) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{10} + \frac{3}{30} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \boxed{\frac{3}{10}}.$$

   (d) **Probabilité conditionnelle :** On cherche $P_{\overline{G}}(N)$.

$$P_{\overline{G}}(N) = \frac{P(N \cap \overline{G})}{P(\overline{G})}$$

   Or $P(\overline{G}) = 1 - P(G) = 1 - \dfrac{3}{10} = \dfrac{7}{10}$.

Et $P(N \cap \overline{G}) = P_N(\overline{G}) \times P(N) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5} = \frac{2}{10}$.

$$P_{\overline{G}}(N) = \frac{2/10}{7/10} = \boxed{\frac{2}{7}}.$$

2. (a) **Loi de probabilité de X :** Calculons les gains nets selon les issues :

   - Le joueur gagne (G) : il reçoit 4 €. Ayant misé m, son gain algébrique est $4 - m$.
     Probabilité : $P(G) = \frac{3}{10} = 0,3$.
   - Le joueur perd et a tiré la noire ($N \cap \overline{G}$) : il récupère sa mise. Gain : 0.
     Probabilité : $\frac{2}{10} = 0,2$ (calculé en 1.d).
   - Le joueur perd et n'a pas la noire ($\overline{N} \cap \overline{G}$) : il perd sa mise. Gain : $-m$.
     Probabilité : $P(\overline{N}) \times P_{\overline{N}}(\overline{G}) = \frac{3}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$.

   Vérification somme des probas : $0,3 + 0,2 + 0,5 = 1$. Ok.

Valeurs prises par X : x_i	$-m$	0	$4-m$
$P(X = x_i)$	$0,5$	$0,2$	$0,3$

   (b) **Espérance mathématique :**

$$E(X) = \sum x_i p_i = -m \times 0,5 + 0 \times 0,2 + (4 - m) \times 0,3$$

$$E(X) = -0,5m + 1,2 - 0,3m = 1,2 - 0,8m$$

   En mettant sur le même dénominateur (10) :

$$E(X) = \frac{12}{10} - \frac{8m}{10} = \boxed{\frac{12 - 8m}{10}}.$$

   (c) **Jeu équitable :** Le jeu est équitable si $E(X) = 0$.

$$12 - 8m = 0 \iff 8m = 12 \iff m = \frac{12}{8} = 1,5.$$

   La mise doit être de **1,50 €**.

3. **Loi binomiale et inéquation :** On répète n fois l'expérience de manière indépendante. La probabilité de gagner est $p = 0,3$.

   La probabilité de ne jamais gagner sur n parties est $(1 - 0,3)^n = 0,7^n$.

   La probabilité de gagner au moins une fois est donc $1 - 0,7^n$. On cherche n tel que :

$$1 - 0,7^n > 0,999 \iff -0,7^n > -0,001 \iff 0,7^n < 0,001$$

La fonction $\ln$ étant strictement croissante sur $]0;+\infty[$:

$$\ln(0,7^n) < \ln(0,001) \iff n\ln(0,7) < \ln(0,001)$$

Or $\ln(0,7) < 0$, donc en divisant on change le sens de l'inégalité :

$$n > \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,7)}$$

A la calculatrice : $\dfrac{\ln(0,001)}{\ln(0,7)} \approx 19,3$. Comme n est un entier, la valeur minimale est $\boxed{n = 20}$.

Correction Exercice 2 (Géométrie dans l'espace)

1. **Coordonnées des points :** Dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$, on a $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$, $H(0;1;1)$.
   - $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EH}$. Comme $E(0;0;1)$ et $\overrightarrow{EH}(0;1;0)$, alors I a pour coordonnées $(0\,;\,0,25\,;\,1)$.
   - $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}$. Comme $\overrightarrow{EF}(1;0;0)$, alors J a pour coordonnées $(0,25\,;\,0\,;\,1)$.
   - $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BF}$. Comme $B(1;0;0)$ et $\overrightarrow{BF}(0;0;1)$, alors K a pour coordonnées $(1\,;\,0\,;\,0,25)$.
2. **Vecteur normal :** On a $A(0;0;0)$ et $G(1;1;1)$, donc $\overrightarrow{AG}(1;1;1)$. Pour montrer que $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK), il suffit de montrer qu'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, par exemple $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$.
   - $\overrightarrow{IJ}(0,25-0\,;\,0-0,25\,;\,1-1) = (0,25\,;\,-0,25\,;\,0)$. $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{IJ} = 1\times0,25+1\times(-0,25)+1\times0 = 0$.
   - $\overrightarrow{JK}(1-0,25\,;\,0-0\,;\,0,25-1) = (0,75\,;\,0\,;\,-0,75)$. $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{JK} = 1\times0,75+0+1\times(-0,75) = 0$.

   $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (IJK), c'est donc un vecteur normal à ce plan.
3. **Équation cartésienne :** Le plan a pour vecteur normal $\overrightarrow{AG}(1;1;1)$, son équation est de la forme $1x+1y+1z+d=0$. Le point $K(1\,;\,0\,;\,0,25)$ appartient au plan :

   $$1+0+0,25+d=0 \iff d=-1,25=-\frac{5}{4}.$$

   L'équation est $x+y+z-\dfrac{5}{4}=0$. En multipliant par 4 :

   $$\boxed{4x+4y+4z-5=0}.$$

4. **Représentation paramétrique de (BC) :** La droite (BC) passe par $B(1;0;0)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = (0;1;0)$.

   $$\begin{cases} x = 1+0\times t \\ y = 0+1\times t \\ z = 0+0\times t \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}).$$

5. **Point L :** L est l'intersection de (BC) et du plan (IJK). Ses coordonnées vérifient le système formé par la paramétrique et l'équation du plan :

$$4(1)+4(t)+4(0)-5=0 \iff 4+4t-5=0 \iff 4t=1 \iff t=\frac{1}{4}.$$

En remplaçant t dans la paramétrique de (BC), on obtient $x=1, y=\frac{1}{4}, z=0$. Donc $\boxed{L\left(1\,;\,\frac{1}{4}\,;\,0\right)}$.

6. **Construction :** (Voir figure complétée en fin de document)
   - L est sur $[BC]$ tel que $BL=\frac{1}{4}BC$.
   - L'intersection de (IJK) avec la face $(BCGF)$ est le segment $[KL]$.
   - Par parallélisme des plans (BCG) et (ADE) (faces opposées), l'intersection de (IJK) avec la face arrière $(ADEH)$ est parallèle à (KL) et passe par I. On trace la parallèle à (KL) passant par I.

7. **Points coplanaires :** Vérifions si $M(\frac{1}{4};1;0)$ appartient au plan (IJK).

$$4x_M+4y_M+4z_M-5=4\left(\frac{1}{4}\right)+4(1)+4(0)-5=1+4+0-5=0.$$

L'équation est vérifiée, donc $M\in(IJK)$. Les points I, J, L, M sont donc coplanaires.

Correction Exercice 3 (Fonctions)

Partie I

1. **Limite en 0 :** $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x}=-\infty$. Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=-\infty}$.
2. **Limite en $+\infty$:** Par croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$. Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=1}$.
3. **Dérivée :** $h(x)=1+\frac{\ln x}{x}$. On dérive le quotient u/v avec $u(x)=\ln x$ et $v(x)=x$. $h'(x)=0+\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x\times 1}{x^2}=\boxed{\frac{1-\ln x}{x^2}}$.
4. **Tableau de variations :** Pour tout $x>0$, $x^2>0$. Le signe de $h'(x)$ est celui de $1-\ln x$. $1-\ln x>0 \iff \ln x<1 \iff x<\mathrm{e}$. $h(\mathrm{e})=1+\frac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}}=1+\frac{1}{\mathrm{e}}$.

x	0		e		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$h(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$1+\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	1

5. **Équation** $h(x) = 0$ **:**

   - Sur l'intervalle $]0; \mathrm{e}]$, h est continue et strictement croissante. L'image de l'intervalle est $]-\infty; 1 + 1/\mathrm{e}]$. Comme 0 appartient à cet intervalle, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α.
   - Sur $[\mathrm{e}; +\infty[$, $h(x)$ décroît de $1 + 1/\mathrm{e}$ vers 1. La fonction est strictement positive, donc pas de solution.

   Encadrement : $h(0,5) = 1 + \dfrac{\ln(0,5)}{0,5} \approx 1 - 1,386 = -0,386 < 0$.

   $h(0,6) = 1 + \dfrac{\ln(0,6)}{0,6} \approx 1 - 0,85 = 0,15 > 0$.

   Comme $h(0,5) < 0 < h(0,6)$, on a bien $\boxed{0,5 < \alpha < 0,6}$.

Partie II

1. **Coefficient directeur de** T_a **:** $f(x) = x \ln x - x$. f est dérivable sur $]0; +\infty[$. $f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$. Le coefficient directeur de la tangente T_a au point d'abscisse a est le nombre dérivé $f'(a) = \ln(a)$.
2. **Coefficient directeur de** D_a **:** $g(x) = \ln x$. $g'(x) = \dfrac{1}{x}$. Le coefficient directeur de D_a est $g'(a) = \dfrac{1}{a}$.
3. **Perpendicularité :** $T_a \perp D_a \iff f'(a) \times g'(a) = -1$

$$\ln(a) \times \frac{1}{a} = -1 \iff \frac{\ln a}{a} = -1 \iff 1 + \frac{\ln a}{a} = 0 \iff h(a) = 0.$$

   D'après la partie I, l'équation $h(a) = 0$ admet une unique solution α. Il existe donc une unique valeur $a = \alpha$ (comprise entre 0,5 et 0,6) pour laquelle les tangentes sont perpendiculaires.

Correction Exercice 4 (Suites)

1. **Calculs :** $u_0 = 4$. $u_1 = \frac{1}{5}(u_0)^2 = \frac{16}{5} = 3,2$. $u_2 = \frac{1}{5}(u_1)^2 = \frac{1}{5}\left(\frac{16}{5}\right)^2 = \frac{1}{5} \times \frac{256}{25} = \boxed{\frac{256}{125}} = 2,048$.
2. **Algorithme Python :** On veut calculer le terme de rang p. Il faut répéter le calcul p fois.

```python
def suite_u(p) :
    u = 4
    for i in range(1, p+1)
        u = (1/5) * u**2
    return u
```

3. (a) **Récurrence :** Soit $\mathcal{P}(n) : 0 < u_n \leqslant 4$.

   Initialisation : $u_0 = 4$, donc $0 < 4 \leqslant 4$. Vrai.

   Hérédité : Supposons $0 < u_n \leqslant 4$.

Alors $0 < u_n^2 \leqslant 16$. La fonction carré est croissante sur les réels positifs, pas de changement de signe.

En divisant par 5 : $0 < \frac{u_n^2}{5} \leqslant \frac{16}{5}$.

Or $\frac{16}{5} = 3,2 \leqslant 4$. Donc $0 < u_{n+1} \leqslant 4$.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant 4$.

(b) **Décroissance :** $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{5} - u_n = u_n \left(\frac{u_n}{5} - 1\right)$.

Comme $u_n > 0$, le signe dépend de $\frac{u_n}{5} - 1$.

Or $u_n \leqslant 4 \implies \frac{u_n}{5} \leqslant 0,8 < 1 \implies \frac{u_n}{5} - 1 < 0$.

Donc $u_{n+1} - u_n < 0$. La suite est **décroissante**.

(c) **Convergence :** La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, selon le Théorème de la Suite Monotone Convergente, (u_n) converge vers une limite ℓ, avec $0 < \ell \leqslant 4$.

(d) **Limite :** ℓ vérifie $\ell = \frac{1}{5}\ell^2 \iff 5\ell = \ell^2 \iff \ell(\ell - 5) = 0$.

Donc $\ell = 0$ ou $\ell = 5$.

Comme la suite est décroissante et part de $u_0 = 4$, elle ne peut pas tendre vers 5.

Donc $\boxed{\ell = 0}$.

4.

5. **Suite géométrique :** Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(u_{n+1}) - \ln(5) \\ &= \ln\left(\frac{u_n^2}{5}\right) - \ln(5) \\ &= \ln(u_n^2) - \ln(5) - \ln(5) \\ &= 2\ln(u_n) - 2\ln(5) \\ &= 2\left(\ln(u_n) - \ln(5)\right) \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

On en déduit que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 2$.

Premier terme : $v_0 = \ln(u_0) - \ln 5 = \ln 4 - \ln 5 = \ln\left(\frac{4}{5}\right)$.

6. **Expression et limite :** $v_n = v_0 \times q^n = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n$.

Comme $\frac{4}{5} < 1$, $\ln(4/5) < 0$. De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$.

Par produit, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty}$.

7. **Expression de u_n :** $v_n = \ln(u_n) - \ln 5 \iff \ln(u_n) = v_n + \ln 5$.

En passant à l'exponentielle : $u_n = \mathrm{e}^{v_n + \ln 5} = \mathrm{e}^{v_n} \times \mathrm{e}^{\ln 5} = 5\mathrm{e}^{v_n}$.

$$u_n = 5\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{4}{5}\right)\times 2^n}.$$

Quand $n \to +\infty$, l'exposant tend vers $-\infty$. Or $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$.

Donc $\lim u_n = 5 \times 0 = 0$. On retrouve bien le résultat de la question 3.d.

ANNEXE COMPLÉTÉE (Exercice 2)