

Correction de l'Exercice 1

1. Médiatrice du segment $[MN]$ avec $M(-1; 3)$ et $N(1; -2)$.

La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment. Elle passe par le milieu du segment et lui est perpendiculaire.

Étape 1 : Calcul des coordonnées du milieu I .

$$x_I = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0 \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{3 + (-2)}{2} = \frac{1}{2}$$

Le milieu est $I\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Étape 2 : Vecteur normal. Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est un vecteur normal à la médiatrice.

$$\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (-1) \\ -2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Étape 3 : Équation cartésienne. Une droite de vecteur normal $\vec{n}(a; b)$ a une équation de la forme $ax + by + c = 0$. Ici, avec $\overrightarrow{MN}(2; -5)$, l'équation est de la forme :

$$2x - 5y + c = 0$$

Or, la médiatrice passe par $I\left(0; \frac{1}{2}\right)$. En remplaçant x et y par les coordonnées de I :

$$2 \times 0 - 5 \times \frac{1}{2} + c = 0 \iff -\frac{5}{2} + c = 0 \iff c = \frac{5}{2}$$

Une équation est donc $2x - 5y + \frac{5}{2} = 0$.

Pour retrouver la forme demandée, on multiplie tout par 2 :

$$2 \left(2x - 5y + \frac{5}{2} \right) = 0 \iff \boxed{4x - 10y + 5 = 0}$$

2. Droite (d') perpendiculaire à $(d) : -x + 2y + 21 = 0$ passant par $A(2; -4)$.

Un vecteur normal à la droite (d) est $\vec{n}(-1; 2)$.

Puisque (d') est perpendiculaire à (d) , le vecteur normal $\vec{n}$ de (d) est un **vecteur directeur** pour (d') . Alternativement, un vecteur directeur de (d) est un vecteur normal pour (d') .

Le vecteur directeur de (d) est $\vec{u}(-b; a)$, soit $\vec{u}(-2; -1)$ ou plus simplement $\vec{v}(2; 1)$. Ce vecteur $\vec{v}(2; 1)$ est donc un **vecteur normal** à la droite (d') .

L'équation de (d') est donc de la forme :

$$2x + 1y + k = 0$$

La droite passe par $A(2; -4)$. On détermine k :

$$2(2) + 1(-4) + k = 0 \iff 4 - 4 + k = 0 \iff k = 0$$

Une équation cartésienne de (d') est donc :

$$\boxed{2x + y = 0}$$

3. Projeté orthogonal H de $C(-7; 2)$ sur (AB) avec $A(-2; 2)$ et $B(4; -1)$.

Le point H est l'intersection de la droite (AB) et de la hauteur issue de C (perpendiculaire à (AB) passant par C).

a) Équation de la droite (AB) : Calculons le vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 - (-2) \\ -1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

On peut simplifier en prenant un vecteur directeur $\vec{u}(2; -1)$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$. Un vecteur normal à (AB) est donc $\vec{n}(1; 2)$. L'équation est de la forme $x + 2y + c = 0$. Passe par $A(-2; 2)$:

$$-2 + 2(2) + c = 0 \iff -2 + 4 + c = 0 \iff c = -2$$

Équation de (AB) : $x + 2y - 2 = 0$.

b) Équation de la perpendiculaire à (AB) passant par C : Le vecteur $\overrightarrow{AB}(6; -3)$ (ou $\vec{u}(2; -1)$) est un vecteur **normal** à cette perpendiculaire. L'équation est de la forme $2x - y + k = 0$. Passe par $C(-7; 2)$:

$$2(-7) - 2 + k = 0 \iff -14 - 2 + k = 0 \iff k = 16$$

Équation de la perpendiculaire : $2x - y + 16 = 0 \iff y = 2x + 16$.

c) Coordonnées de H : On résout le système formé par les deux équations :

$$\begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ y = 2x + 16 \end{cases}$$

Substitution dans la première équation :

$$x + 2(2x + 16) - 2 = 0 \iff x + 4x + 32 - 2 = 0 \iff 5x + 30 = 0 \iff 5x = -30 \iff x = -6$$

On calcule y :

$$y = 2(-6) + 16 = -12 + 16 = 4$$

Le projeté orthogonal est :

$$H(-6; 4)$$

Correction de l'Exercice 2

1. $x^2 - 6x + 9 + y^2 = 25$

On reconnaît une identité remarquable parfaite pour les termes en x :

$$(x - 3)^2 + y^2 = 25$$

Ceci est de la forme $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$.

Conclusion : C'est l'équation d'un cercle.

$$\text{Cercle de centre } \Omega(3; 0) \text{ et de rayon } R = \sqrt{25} = 5$$

2. $x^2 - 10x + y^2 + 20y + 125 = 121$

On utilise la forme canonique pour grouper les termes :

$$\underbrace{x^2 - 10x}_{(x-5)^2 - 25} + \underbrace{y^2 + 20y}_{(y+10)^2 - 100} + 125 = 121$$

En remplaçant :

$$(x - 5)^2 - 25 + (y + 10)^2 - 100 + 125 = 121$$

Simplifions les constantes à gauche : $-25 - 100 + 125 = 0$.

$$(x - 5)^2 + (y + 10)^2 = 121$$

Comme $121 > 0$, c'est bien un cercle.

Conclusion :

$$\text{Cercle de centre } \Omega(5; -10) \text{ et de rayon } R = \sqrt{121} = 11$$

3. $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 12 = 0$

On regroupe les termes en x et en y :

$$(x^2 + 2x) + (y^2 - 2y) + 12 = 0$$

Mise sous forme canonique :

$$[(x+1)^2 - 1] + [(y-1)^2 - 1] + 12 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 - 2 + 12 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 + 10 = 0$$

Ce qui donne :

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = -10$$

Or, une somme de carrés (nombres réels) est toujours positive ou nulle. Elle ne peut jamais être égale à -10 .

Conclusion :

Ce n'est pas une équation de cercle (l'ensemble est vide).

Correction de l'Exercice 3

Soit $D(4; -6)$, $E(4; 5)$ et $F(-4; -3)$.

1. Équation de la hauteur issue de D dans le triangle DEF .

Cette hauteur, notons-la (h_D) , passe par D et est perpendiculaire au côté opposé (EF) .

Calculons le vecteur $\overrightarrow{EF}$ qui sera un **vecteur normal** pour (h_D) :

$$\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} -4 - 4 \\ -3 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Pour simplifier les calculs, nous pouvons utiliser un vecteur colinéaire plus simple : $\vec{n}(1; 1)$ (en divisant par -8).

L'équation de (h_D) est de la forme $1x + 1y + c = 0$. Elle passe par $D(4; -6)$:

$$4 + (-6) + c = 0 \iff -2 + c = 0 \iff c = 2$$

L'équation de la hauteur issue de D est :

$$x + y + 2 = 0$$

2. Équation de la hauteur issue de F dans le triangle DEF .

Cette hauteur, notons-la (h_F) , passe par F et est perpendiculaire au côté (DE) .

Calculons le vecteur $\overrightarrow{DE}$:

$$\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 4 - 4 \\ 5 - (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \end{pmatrix}$$

On remarque que l'abscisse du vecteur est nulle ($x_D = x_E = 4$). Le segment $[DE]$ est donc vertical. Par conséquent, la hauteur issue de F (perpendiculaire à une verticale) sera **horizontale**.

Son équation est donc de la forme $y = \text{constante}$. Puisqu'elle passe par $F(-4; -3)$, cette constante vaut y_F .

L'équation de la hauteur issue de F est :

$$\boxed{y = -3}$$

3. Coordonnées de H , point d'intersection de ces deux hauteurs (orthocentre).

On cherche le couple $(x; y)$ solution du système formé par les équations trouvées en 1) et 2) :

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y = -3 \end{cases}$$

On remplace y par -3 dans la première équation :

$$x + (-3) + 2 = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1$$

Les coordonnées de l'intersection sont :

$$\boxed{H(1; -3)}$$

Correction de l'Exercice 4

On cherche les points d'intersection en résolvant le système formé par les équations des deux cercles :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8y = 0 & (L_1) \\ x^2 + y^2 - 16x + 4y + 32 = 0 & (L_2) \end{cases}$$

1. Obtention de l'équation de la droite d'intersection

On effectue la soustraction $(L_1) - (L_2)$ pour éliminer les termes carrés :

$$(x^2 + y^2 - 8y) - (x^2 + y^2 - 16x + 4y + 32) = 0$$

$$-8y + 16x - 4y - 32 = 0$$

$$16x - 12y - 32 = 0$$

On simplifie par 4 :

$$4x - 3y - 8 = 0 \iff 3y = 4x - 8 \iff y = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$$

2. Substitution dans (L_1)

On remplace y dans la première équation :

$$x^2 + \left(\frac{4x-8}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{4x-8}{3}\right) = 0$$

Pour éliminer les fractions, on multiplie tout par 9 (3^2) :

$$9x^2 + (4x-8)^2 - 24(4x-8) = 0$$

On développe :

$$9x^2 + (16x^2 - 64x + 64) - (96x - 192) = 0$$

$$25x^2 - 160x + 256 = 0$$

3. Résolution de l'équation

Calculons le discriminant Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-160)^2 - 4 \times 25 \times 256$$

$$\Delta = 25\,600 - 100 \times 256 = 25\,600 - 25\,600 = 0$$

Conclusion :

Puisque $\Delta = 0$, l'équation admet une **unique solution**. Les cercles ont donc un seul point commun.

Les cercles C et C' sont tangents.

(Note : Cette méthode permet en plus de trouver les coordonnées du point de contact. Ici $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{160}{50} = 3,2$ et on déduit y_0).

Méthode Alternative pour l'Exercice 4

Pour déterminer si deux cercles sont tangents, il faut comparer la distance entre leurs centres $\Omega\Omega'$ et la somme (ou la différence) de leurs rayons R et R' .

1. Caractéristiques du cercle C : L'équation est $x^2 + y^2 - 8y = 0$.

$$x^2 + (y-4)^2 - 16 = 0 \iff x^2 + (y-4)^2 = 16$$

- Centre : $\Omega(0; 4)$
- Rayon : $R = \sqrt{16} = 4$

2. Caractéristiques du cercle C' : L'équation est $x^2 + y^2 - 16x + 4y + 32 = 0$. On effectue la mise sous forme canonique pour x et y :

$$[(x - 8)^2 - 64] + [(y + 2)^2 - 4] + 32 = 0$$

$$\iff (x - 8)^2 + (y + 2)^2 - 64 - 4 + 32 = 0$$

$$\iff (x - 8)^2 + (y + 2)^2 - 36 = 0$$

$$\iff (x - 8)^2 + (y + 2)^2 = 36$$

- Centre : $\Omega'(8; -2)$
- Rayon : $R' = \sqrt{36} = 6$

3. Calcul de la distance des centres $\Omega\Omega'$:

$$\Omega\Omega' = \sqrt{(x_{\Omega'} - x_{\Omega})^2 + (y_{\Omega'} - y_{\Omega})^2}$$

$$\Omega\Omega' = \sqrt{(8 - 0)^2 + (-2 - 4)^2}$$

$$\Omega\Omega' = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

4. Conclusion : On calcule la somme des rayons :

$$R + R' = 4 + 6 = 10$$

On constate que :

$$\Omega\Omega' = R + R'$$

Puisque la distance entre les centres est exactement égale à la somme des rayons, les cercles se touchent en un point unique et sont situés l'un à l'extérieur de l'autre.

Les cercles C et C' sont tangents extérieurement.