Consignes générales :

- Le mode examen de la calculatrice devra être activé *seulement quand le surveillant de salle le demandera*.
- La qualité de la rédaction et le soin apporté à la copie seront pris en compte dans l'évaluation.
- Le sujet comporte une annexe qui sera à compléter et à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5 points)

Un jeu consiste à tirer simultanément 4 boules indiscernables au toucher d'un sac contenant une boule noire et 9 boules blanches, puis à lancer un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.

Si la boule noire est tirée, il faut obtenir un nombre pair avec le dé pour gagner. Si la boule noire n'est pas tirée, il faut obtenir un six avec le dé pour gagner.

On appelle N l'évènement « la boule noire figure parmi les boules tirées » et G l'évènement « le joueur gagne ».

1. (a) Montrer que la probabilité de l'évènement N est égale à $\frac{2}{5}$.
   (b) Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à cette expérience aléatoire.
   (c) Démontrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $\frac{3}{10}$.
   (d) Le joueur ne gagne pas. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré la boule noire ?
2. Pour jouer à ce jeu, une mise de départ de m euros est demandée, où m est un réel strictement positif.
   - Si le joueur gagne, il reçoit 4 euros.
   - S'il ne gagne pas mais qu'il a tiré la boule noire, le joueur récupère sa mise.
   - S'il ne gagne pas et qu'il n'a pas tiré la boule noire, le joueur perd sa mise.

   On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

   (a) Déterminer la loi de probabilité de X à l'aide du tableau suivant qui sera recopié et complété sur votre copie.

Valeurs prises par X : x_i	$-m$	$\dots$	$\dots$
$P(X = x_i)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

   (b) Justifier que l'espérance mathématique de X a pour expression $\frac{12-8m}{10}$.
   (c) On dit que le jeu est équitable si l'espérance mathématique de X est nulle. Déterminer m pour que le jeu soit équitable.

3. Soit n un entier naturel non nul.
   On joue n fois à ce jeu sachant qu'après chaque partie les boules sont remises dans le sac.
   Déterminer la valeur minimale de n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une fois est supérieure à 0,999.

Exercice 2 (5 points)

La figure en annexe représente un cube $ABCDEFGH$.
On donne trois points I, J et K vérifiant :

$$\overrightarrow{EI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EH}, \quad \overrightarrow{EJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}, \quad \overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BF}$$

Les points I, J et K sont représentés sur la figure donnée en annexe, qui sera à compléter et à rendre avec la copie.

On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

1. Donner sans les justifier les coordonnées des points I, J et K.
2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK).
3. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est $4x + 4y + 4z - 5 = 0$.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BC).
5. Montrer que L, point d'intersection de la droite (BC) avec le plan (IJK), a pour coordonnées $\left(1; \frac{1}{4}; 0\right)$.
6. Sur la figure en annexe, placer le point L et construire l'intersection du plan (IJK) avec le plan (BCG).
7. Soit $M\left(\frac{1}{4}; 1; 0\right)$. Montrer que les points I, J, L et M sont coplanaires.

Exercice 3 (5 points)

Partie I

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $h(x) = 1 + \dfrac{\ln(x)}{x}$.

1. Déterminer la limite de la fonction h en 0.
2. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.

3. On note h' la fonction dérivée de h.
   Démontrer que, pour tout nombre réel x de $]0;+\infty[$, on a : $h'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction h sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
5. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$.
   Justifier que l'on a : $0,5 < \alpha < 0,6$.

Partie II

Dans cette partie, on considère les fonctions f et g définies sur $]0;+\infty[$ par :

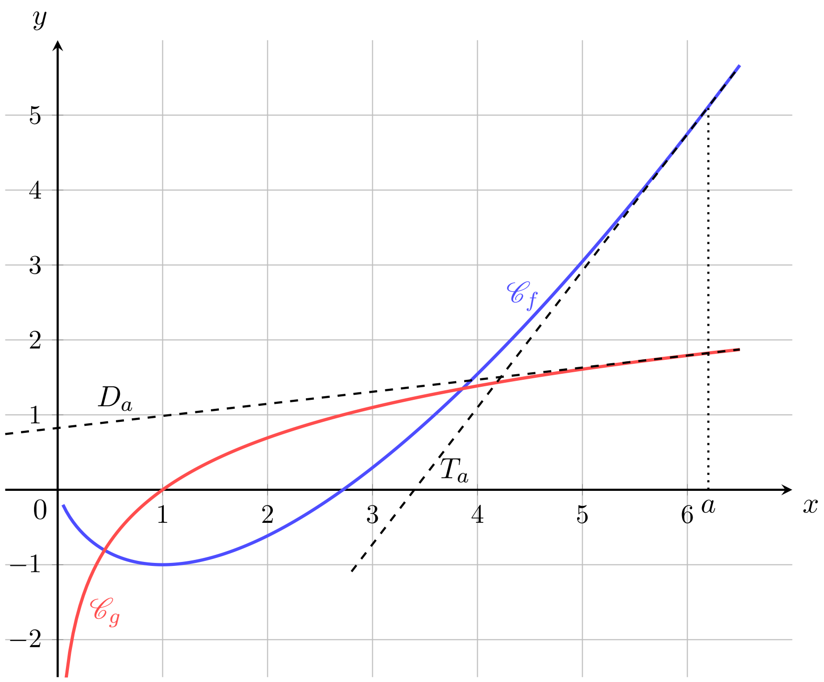
$$f(x) = x\ln(x) - x \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Pour tout nombre réel a strictement positif, on appelle :

- T_a la tangente à $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse a ;
- D_a la tangente à $\mathscr{C}_g$ en son point d'abscisse a.

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ainsi que deux tangentes T_a et D_a sont représentées ci-dessous.



On recherche d'éventuelles valeurs de a pour lesquelles les droites T_a et D_a sont perpendiculaires.
Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

1. Justifier que la droite T_a a pour coefficient directeur $\ln(a)$.

2. Justifier que la droite D_a a pour coefficient directeur $\frac{1}{a}$.
   On rappelle que dans un repère orthonormé, deux droites de coefficients directeurs respectifs m et m' sont perpendiculaires si, et seulement si, $mm' = -1$.
3. Démontrer qu'il existe une unique valeur de a, que l'on identifiera, pour laquelle les droites T_a et D_a sont perpendiculaires.

Exercice 4 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 4$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n)^2$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.
2. La fonction ci-dessous, écrite en langage Python, doit renvoyer, pour un entier p donné, le terme u_p.

```python
def suite_u(p) :
    u = ...
    for i in range(1, ...) :
        u = ...
    return u
```

   Recopier ce programme sur votre copie, en complétant les lignes manquantes.
3. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $0 < u_n \leqslant 4$.
   (b) Démontrer que la suite est décroissante.
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   (d) On admet que la limite ℓ de la suite vérifie l'égalité $\ell = \frac{1}{5}\ell^2$.
   En déduire la valeur de ℓ.
4. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \ln(u_n) - \ln(5)$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 2.
   (b) Donner l'expression de v_n en fonction de n, et déterminer $\lim_{n\to+\infty} v_n$.
   (c) Montrer que $u_n = 5\,\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{4}{5}\right)\times 2^n}$ et retrouver la limite de la suite (u_n).

ANNEXE (Exercice 2)