Correction Exercice 1 (Suites numériques)

1. **Calcul de u_1 :** Au bout d'une demi-heure ($n = 1$), l'organisme élimine 10 % de la substance présente initialement (1 mg) et reçoit 0,25 mg.

$$u_1 = \left(1 - \frac{10}{100}\right) \times 1 + 0,25 = 0,9 \times 1 + 0,25 = \boxed{1,15}.$$

La quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure est de **1,15 mg**.

2. **Justification de la relation de récurrence :** Soit n un entier naturel. Notons u_n la quantité de médicament à l'étape n. À l'étape $n+1$ (30 minutes plus tard) :

   - Il reste 90 % de la quantité précédente, soit $0,9u_n$.
   - On ajoute une dose de 0,25 mg.

   On a donc pour tout entier naturel n :

$$\boxed{u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25}.$$

3. (a) **Démonstration par récurrence :** Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $u_n \leqslant u_{n+1} < 5$.

   Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $u_1 = 1,15$. On a bien $1 \leqslant 1,15 < 5$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité : Supposons que pour un entier $k \geqslant 0$, on ait $u_k \leqslant u_{k+1} < 5$. Montrons que $u_{k+1} \leqslant u_{k+2} < 5$. On part de l'hypothèse de récurrence :

$$u_k \leqslant u_{k+1} < 5$$

   On multiplie par $0,9$ (qui est positif, donc le sens des inégalités est conservé) :

$$0,9u_k \leqslant 0,9u_{k+1} < 0,9 \times 5$$

$$0,9u_k \leqslant 0,9u_{k+1} < 4,5$$

   On ajoute 0,25 à chaque membre :

$$0,9u_k + 0,25 \leqslant 0,9u_{k+1} + 0,25 < 4,5 + 0,25$$

   Or $u_{k+1} = 0,9u_k + 0,25$ et $u_{k+2} = 0,9u_{k+1} + 0,25$. Donc :

$$u_{k+1} \leqslant u_{k+2} < 4,75$$

   Comme $4,75 < 5$, on a bien $u_{k+1} \leqslant u_{k+2} < 5$. La propriété est héréditaire.

   Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $\boxed{u_n \leqslant u_{n+1} < 5}$.

   (b) **Convergence et limite :**

   - La suite (u_n) est croissante (car $u_n \leqslant u_{n+1}$) et majorée par 5. D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) est **convergente** vers une limite réelle $\ell \leqslant 5$.

- La fonction $f : x \mapsto 0,9x + 0,25$ est continue sur $\mathbb{R}$. La limite ℓ vérifie donc l'équation du point fixe $f(\ell) = \ell$:

$$\ell = 0,9\ell + 0,25 \iff 0,1\ell = 0,25 \iff \ell = \frac{0,25}{0,1} = 2,5.$$

La limite de la suite (u_n) est **2,5**.

4. (a) **Complétion du script Python :** On cherche le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 1,8$. La boucle `while` doit donc continuer tant que cette condition n'est *pas* vérifiée, c'est-à-dire tant que $u < 1,8$:

```python
def efficace():
    u = 1
    n = 0
    while u < 1.8 :
        u = 0.9 * u + 0.25
        n = n + 1
    return n
```

(b) **Interprétation :** À l'aide de la calculatrice, on calcule les termes successifs :

$u_0 = 1$; $u_1 = 1,15$; $u_2 = 1,285$; $u_3 \approx 1,407$; $u_4 \approx 1,516$; $u_5 \approx 1,614$; $u_6 \approx 1,703$; $u_7 \approx 1,783$; $u_8 \approx 1,854$.

Le script renvoie la valeur **8**.

Cela signifie que le médicament devient réellement efficace au bout de 8 périodes de 30 minutes, soit **4 heures**.

5. **Toxicité :** Nous avons montré à la question 3.b que la suite (u_n) est croissante et converge vers 2,5.

   Ainsi, pour tout entier n, $u_n \leqslant 2,5$. Comme $2,5 < 3$, la quantité de médicament ne dépassera jamais 3 mg.

   Le traitement ne présente pas de risque pour le patient.

Correction Exercice 2 (Probabilités)

Partie A

1. **Traduction des données :** On note $P_F(T)$ la probabilité d'adhérer au tennis sachant qu'on est une femme, etc.
   - « Parmi les femmes, un quart adhère à la section tennis » : $P_F(T) = \frac{1}{4} = 0,25$.
   - « Parmi les hommes, un tiers adhère à la section tennis » : $P_{\overline{F}}(T) = \frac{1}{3}$.
   - « 30% des membres adhèrent à la section tennis » : $P(T) = 0,3$.
2. **Calcul de $P(F)$:** On utilise la formule des probabilités totales selon le système complet d'événements $\{F, \overline{F}\}$:

$$P(T) = P(T \cap F) + P(T \cap \overline{F}) = P_F(T) \times P(F) + P_{\overline{F}}(T) \times P(\overline{F}).$$

Posons $x = P(F)$. Alors $P(\overline{F}) = 1 - x$.

$$0,3 = \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}(1-x).$$

$$0,3 = \frac{3}{12}x + \frac{1}{3} - \frac{4}{12}x \iff 0,3 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}x.$$

$$\frac{9}{30} - \frac{10}{30} = -\frac{1}{12}x \iff -\frac{1}{30} = -\frac{1}{12}x \iff x = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

On a donc bien $\boxed{P(F) = \frac{2}{5}}$.

3. **Probabilité conditionnelle :** On cherche $P_T(F)$ (probabilité que ce soit une femme sachant qu'il est au tennis).

$$P_T(F) = \frac{P(F \cap T)}{P(T)} = \frac{P_F(T) \times P(F)}{P(T)} = \frac{0,25 \times 0,4}{0,3} = \frac{0,1}{0,3} = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

Partie B

1. (a) **Loi de probabilité de Y :** L'expérience consiste à répéter 4 fois de manière identique et indépendante une épreuve de Bernoulli dont le succès est S : « le membre adhère au tennis » de probabilité $p = 0,3$. La variable aléatoire Y compte le nombre de succès. Y **suit donc la loi binomiale** $\mathcal{B}(4\,;\,0,3)$**.**

   (b) **Calcul de probabilité :** On cherche $P(Y = 2)$.

$$P(Y = 2) = \binom{4}{2} \times 0,3^2 \times (1 - 0,3)^{4-2} = 6 \times 0,09 \times 0,49 = \boxed{0,2646}.$$

2. **Calcul de p_n :** Soit Y_n la variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,0,3)$. p_n est la probabilité d'avoir au moins un membre adhérent au tennis en n semaines, soit $P(Y_n \geqslant 1)$. L'événement

contraire est « aucun membre n'adhère au tennis », soit $(Y_n = 0)$: $P(Y_n \geqslant 1) = 1 - P(Y_n = 0)$

$$P(Y_n = 0) = \binom{n}{0} \times 0,3^0 \times 0,7^n = 1 \times 1 \times 0,7^n = 0,7^n.$$

Donc $\boxed{p_n = 1 - 0,7^n}$.

3. **Inéquation :** On cherche n tel que $p_n \geqslant 0,99$.

$$1 - 0,7^n \geqslant 0,99 \iff -0,7^n \geqslant -0,01 \iff 0,7^n \leqslant 0,01.$$

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, donc :

$$\ln(0,7^n) \leqslant \ln(0,01) \iff n \ln(0,7) \leqslant \ln(0,01).$$

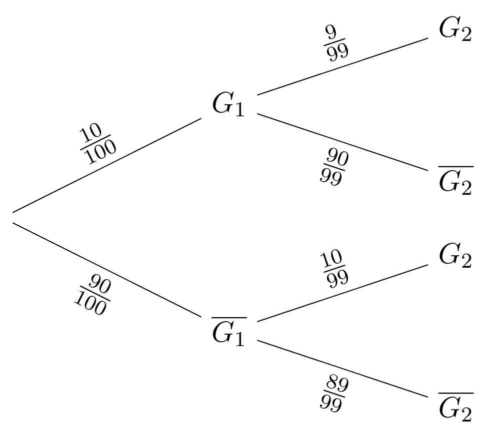
Comme $0 < 0,7 < 1$, on a $\ln(0,7) < 0$. En divisant, on change le sens de l'inégalité :

$$n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,7)}.$$

Or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,7)} \approx 12,9$. Le nombre minimal de semaines est donc **13**.

Partie C (Loterie)

4. (a) **Arbre pondéré complété :** Il y a 100 jetons dont 10 gagnants (G) et 90 perdants ($\overline{G}$). Tirage sans remise.



(b) **Loi de probabilité de X :** Le coût est de 5 €. Gain brut par jeton gagnant : 20 €. Les valeurs possibles de X sont :

- 2 gagnants ($G_1 \cap G_2$) : Gain net $20 + 20 - 5 = 35$ €.

  Prob : $P(X = 35) = \frac{10}{100} \times \frac{9}{99} = \frac{90}{9900} = \dfrac{1}{110}$.
- 1 gagnant ($G_1 \cap \overline{G_2}$ ou $\overline{G_1} \cap G_2$) : Gain net $20 - 5 = 15$ €.

  Prob : $P(X = 15) = \frac{10}{100} \times \frac{90}{99} + \frac{90}{100} \times \frac{10}{99} = \frac{900}{9900} + \frac{900}{9900} = \dfrac{1800}{9900} = \dfrac{20}{110} = \dfrac{2}{11}$.
- 0 gagnant ($\overline{G_1} \cap \overline{G_2}$) : Gain net -5 €.

Prob : $P(X=-5) = \frac{90}{100} \times \frac{89}{99} = \frac{8010}{9900} = \dfrac{89}{110}$.

Vérification : $1+20+89=110$. OK.

x_i	-5	15	35
$P(X=x_i)$	$\dfrac{89}{110}$	$\dfrac{20}{110}$	$\dfrac{1}{110}$

(c) **Espérance :**

$$E(X) = -5 \times \frac{89}{110} + 15 \times \frac{20}{110} + 35 \times \frac{1}{110}$$
$$E(X) = \frac{-445+300+35}{110} = \frac{-110}{110} = \boxed{-1}.$$

Interprétation : En moyenne, sur un grand nombre de parties, le joueur perd 1 € par partie. Le jeu est défavorable au joueur.

Correction Exercice 3 (Géométrie dans l'espace)

Données préliminaires : Dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$, on a les coordonnées des sommets du cube : $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$, $H(0;1;1)$.

Les milieux donnés sont :

- I milieu de $[AE]$: $I(0\,;\,0\,;\,0,5)$.
- J milieu de $[BC]$: $J(1\,;\,0,5\,;\,0)$.

Question 1 : Position relative des droites (IJ) et (EC)

Réponse (b) : Les droites (IJ) et (EC) sont non coplanaires.

Justification :

- **Étude de la colinéarité :** $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1-0\\0,5-0\\0-0,5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0,5\\-0,5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

  Les coordonnées ne sont pas proportionnelles ($1 = 1$ mais $0,5 \neq 1$). Les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles.
- **Étude de l'intersection :** Déterminons une représentation paramétrique pour chaque droite :
  - Pour (IJ), passant par $I(0\,;\,0\,;\,0,5)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{IJ}(1\,;\,0,5\,;\,-0,5)$:

  $$\begin{cases} x = t \\ y = 0,5t \\ z = 0,5 - 0,5t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

  - Pour (EC), passant par $E(0\,;\,0\,;\,1)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{EC}(1\,;\,1\,;\,-1)$:

  $$\begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = 1 - k \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{R})$$

  On cherche s'il existe un couple (t, k) solution du système :

  $$\begin{cases} t = k \\ 0,5t = k \\ 0,5 - 0,5t = 1 - k \end{cases}$$

  Les deux premières lignes donnent $t = k$ et $0,5t = t$, ce qui implique $0,5t = 0 \implies t = 0$ et donc $k = 0$. En remplaçant dans la troisième équation : $0,5 - 0 = 1 - 0 \iff 0,5 = 1$. **C'est impossible.**
- **Conclusion :** Les droites ne sont ni parallèles ni sécantes, elles sont donc **non coplanaires**.

Question 2 : Produit scalaire $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG}$

Réponse (c) : Le produit scalaire $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG}$ est égal à 1.

Justification : Calculons les coordonnées des vecteurs :

- $\overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (car $F(1;0;1)$ et $A(0;0;0)$).
- $\overrightarrow{BG} \begin{pmatrix} x_G - x_B \\ y_G - y_B \\ z_G - z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calcul du produit scalaire :

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG} = (1 \times 0) + (0 \times 1) + (1 \times 1) = 0 + 0 + 1 = 1.$$

Question 3 : Équation du plan $\mathcal{P} = (AFH)$

Réponse (d) : Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne : $x + y - z = 0$.

Justification : Vérifions si les coordonnées des points A, F et H satisfont l'équation $x+y-z=0$:

- Pour $A(0;0;0) : 0 + 0 - 0 = 0$. (Vérifié)
- Pour $F(1;0;1) : 1 + 0 - 1 = 0$. (Vérifié)
- Pour $H(0;1;1) : 0 + 1 - 1 = 0$. (Vérifié)

Les trois points non alignés définissant le plan vérifient l'équation, c'est donc la bonne.

Question 4 : Vecteur normal au plan $\mathcal{P}$

Réponse (b) : $\overrightarrow{EL}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

Justification : D'après la question précédente, une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est $1x+1y-1z=0$. Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est donc $\vec{n}(1\,;\,1\,;\,-1)$.

Regardons les vecteurs proposés :

- $\overrightarrow{EG}(1;1;0)$ n'est pas colinéaire à $\vec{n}$.
- $\overrightarrow{EC}(1;1;-1)$ est exactement le vecteur $\vec{n}$.

Or, le point L est défini comme l'intersection de la droite (EC) et du plan $\mathcal{P}$. Les points E, L et C sont donc alignés. Le vecteur $\overrightarrow{EL}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{EC}$, qui est normal au plan. Donc $\overrightarrow{EL}$ est bien un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

Question 5 : Décomposition du vecteur $\overrightarrow{AL}$

Réponse (d) : $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$.

Justification : Calculons d'abord les coordonnées du point L. L est l'intersection de la droite (EC) et du plan $\mathcal{P}$.

- Représentation de (EC) : $x = t, y = t, z = 1 - t$ (car passant par $E(0;0;1)$ et vecteur $\overrightarrow{EC}(1;1;-1)$).
- Équation de $\mathcal{P}$: $x + y - z = 0$.

On injecte les coordonnées paramétriques dans l'équation du plan :

$$t + t - (1 - t) = 0 \iff 3t - 1 = 0 \iff t = \frac{1}{3}.$$

Les coordonnées de L sont donc $\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,1 - \frac{1}{3}\right)$, soit $L\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$.

Dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$, cela signifie :

$$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}.$$

Correction Exercice 4 (Analyse)

$f(x) = xe^{x-1} + 1$.

Partie A : Étude de la fonction

1. **Limite en $-\infty$:** On pose $X = x - 1$.

   Quand $x \to -\infty$, $X \to -\infty$. $f(x) = (X+1)e^X + 1 = Xe^X + e^X + 1$.

   On sait que $\lim\limits_{X \to -\infty} Xe^X = 0$ (croissances comparées) et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$.

   Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

   Déduction : La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ au voisinage de $-\infty$.
2. **Limite en $+\infty$:** $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x-1} = +\infty$.

   Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
3. **Dérivée :** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables.

   $f(x) = u(x)v(x) + 1$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^{x-1}$.

   $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^{x-1}$ (dérivée de e^u est $u'e^u$).

   $f'(x) = 1 \times e^{x-1} + x \times e^{x-1} = (x+1)e^{x-1}$.

   On a bien $\boxed{f'(x) = (x+1)e^{x-1}}$.
4. **Variations :** Pour tout réel x, $e^{x-1} > 0$. Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $x + 1$. $x + 1 > 0 \iff x > -1$. $f(-1) = -1e^{-2} + 1 = 1 - e^{-2}$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$1-e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B : Tangente passant par l'origine

1. **Équation de T_a :** L'équation réduite de la tangente en a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

$$y = (a+1)e^{a-1}(x - a) + ae^{a-1} + 1.$$

2. **Condition pour passer par l'origine :** T_a passe par l'origine $O(0; 0)$ si et seulement si les coordonnées de O vérifient l'équation :

$$0 = (a+1)e^{a-1}(0 - a) + ae^{a-1} + 1$$

$$0 = -a(a+1)e^{a-1} + ae^{a-1} + 1$$
$$0 = (-a^2 - a)e^{a-1} + ae^{a-1} + 1$$
$$0 = e^{a-1}(-a^2 - a + a) + 1$$
$$0 = 1 - a^2e^{a-1}.$$

Ce qui démontre l'égalité demandée.

3. **Unicité de la solution :** Posons $g(x) = 1 - x^2e^{x-1}$ sur $]0; +\infty[$.

   g est dérivable : $g'(x) = -(2xe^{x-1} + x^2e^{x-1}) = -x(2+x)e^{x-1}$.

   Sur $]0; +\infty[$, $x > 0$ et $x + 2 > 0$ et $e^{x-1} > 0$, donc $g'(x) < 0$.

   La fonction g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

   - $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1 - 0 = 1$.
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2e^{x-1} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

   D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$.

   Calculons $g(1)$: $g(1) = 1 - 1^2e^0 = 1 - 1 = 0$.

   Donc $\boxed{\alpha = 1}$.

4. **Équation de la tangente :** La tangente recherchée est T_1. $f'(1) = (1+1)e^0 = 2$. $f(1) = 1e^0+1 = 2$.
   $y = 2(x-1) + 2 \implies \boxed{y = 2x}$.

Partie C : Point d'inflexion

1. **Calcul de $f''(x)$:** $f'(x) = (x+1)e^{x-1}$.

   On dérive à nouveau (produit $u \times v$ avec $u(x) = x + 1$, $v(x) = e^{x-1}$) :

   $$f''(x) = 1 \times e^{x-1} + (x+1) \times e^{x-1} = (1 + x + 1)e^{x-1} = (x+2)e^{x-1}.$$

2. **Point d'inflexion :** Un point d'inflexion existe si f'' s'annule en changeant de signe.

   $e^{x-1} > 0$, donc $f''(x)$ est du signe de $x + 2$.

   $f''(x) = 0 \iff x = -2$.

   $f''(x) < 0$ sur $]-\infty; -2[$ (concave) et $f''(x) > 0$ sur $]-2; +\infty[$ (convexe).

   Il y a donc un unique point d'inflexion au point d'abscisse -2.

   Ordonnée : $f(-2) = -2e^{-3} + 1$.

   Coordonnées : $\boxed{(-2\,;\,1 - 2e^{-3})}$.