L'utilisation d'une calculatrice est autorisée en mode examen.
Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Exercice 1 : (4 points)

Un médicament est administré à un patient par voie intraveineuse.
Après une première injection de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.
On estime que, toutes les 30 minutes, l'organisme du patient élimine 10% de la quantité de médicament présente dans le sang et qu'il reçoit une dose supplémentaire de 0,25 mg de la substance médicamenteuse.
On étudie l'évolution de la quantité de médicament dans le sang avec le modèle suivant :

Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité, en mg, de médicament dans le sang du patient au bout de n périodes de trente minutes. On a donc $u_0 = 1$.

1. Calculer la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$.
3. (a) Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} < 5$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
4. On estime que le médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à 1,8 mg.
   (a) Recopier et compléter le script écrit en langage Python suivant de manière à déterminer au bout de combien de périodes de trente minutes le médicament commence à être réellement efficace.

```
def efficace():
    u = 1
    n = 0
    while ...... :
        u = ......
        n = n + 1
    return n
```

   (b) Quelle est la valeur renvoyée par ce script ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
5. Le médicament devient toxique lorsque sa quantité présente dans le sang dépasse 3mg. D'après le modèle choisi, le traitement présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

Exercice 2 : (6 points)

Dans une association sportive, parmi les femmes, un quart adhère à la section tennis et parmi les hommes, un tiers adhère à la section tennis. On sait également que 30% des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

Partie A

On choisit au hasard un membre de cette association et on note :

- F l'évènement « le membre choisi est une femme »,
- T l'évènement « le membre choisi adhère à la section tennis ».

1. Traduire les informations de l'énoncé sous forme de probabilités.
2. Montrer que la probabilité de l'évènement F est égale à $\frac{2}{5}$.
   On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
3. On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis. Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme ?

Partie B

Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie chaque semaine pendant le mois de décembre qui comporte quatre semaines consécutives.

1. Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard pour tenir la loterie. On suppose que chaque membre a la même probabilité d'être choisi et qu'un membre peut tenir la loterie plusieurs fois.
   On appelle Y la variable aléatoire donnant le nombre de membres adhérant à la section tennis parmi les quatre membres choisis au cours du mois de décembre.
   (a) Donner la loi de probabilité suivie par Y en justifiant votre réponse.
   (b) Déterminer la probabilité pour qu'au mois de décembre, il y ait exactement deux membres adhérant à la section tennis parmi les membres choisis.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité pour qu'en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre adhérant à la section tennis parmi les membres choisis.
   Montrer que pour tout entier n non nul, $p_n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$.
3. Déterminer le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geqslant 0,99$.

4. Pour cette loterie, on utilise une urne contenant 100 jetons ; 10 jetons exactement sont gagnants et rapportent 20 euros chacun, les autres ne rapportent rien.

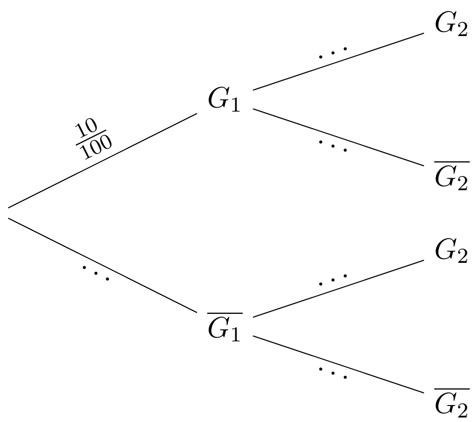
   Pour jouer à cette loterie, un joueur doit payer 5 € puis tire au hasard et successivement deux jetons de l'urne, sans remettre le premier jeton tiré dans l'urne pour le deuxième tirage : il reçoit alors 20 € par jeton gagnant. Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne pour le joueur suivant.

   On note X la variable aléatoire associant le gain algébrique (déduction faite des 5 €) réalisé par un joueur lors d'une partie de cette loterie.

   (a) On note dans cette question :

   - G_1 l'évènement « le premier jeton tiré est gagnant »,
   - G_2 l'évènement « le second jeton tiré est gagnant ».

   Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



   (b) En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   (c) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 3 : (5 points)

Description de la figure dans l'espace muni du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ **:**

$ABCDEFGH$ désigne un cube de côté 1.
On appelle $\mathcal{P}$ le plan (AFH).
Le point I est le milieu du segment $[AE]$,
le point J est le milieu du segment $[BC]$,
le point K est le milieu du segment $[HF]$,
le point L est le point d'intersection de la droite (EC) et du plan $\mathcal{P}$.

Ceci est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte aucun point.

1. (a) Les droites (IJ) et (EC) sont strictement parallèles.
   (b) Les droites (IJ) et (EC) sont non coplanaires.
   (c) Les droites (IJ) et (EC) sont sécantes.
   (d) Les droites (IJ) et (EC) sont confondues.
2. (a) Le produit scalaire $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG}$ est égal à 0.
   (b) Le produit scalaire $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG}$ est égal à (-1).
   (c) Le produit scalaire $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG}$ est égal à 1.
   (d) Le produit scalaire $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG}$ est égal à 2.
3. Dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$:
   (a) Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne : $x + y + z - 1 = 0$.
   (b) Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne : $x - y + z = 0$.
   (c) Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne : $-x + y + z = 0$.
   (d) Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne : $x + y - z = 0$.
4. (a) $\overrightarrow{EG}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
   (b) $\overrightarrow{EL}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
   (c) $\overrightarrow{IJ}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
   (d) $\overrightarrow{DI}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
5. (a) $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$.
   (b) $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AK}$.
   (c) $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$.
   (d) $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$.

Exercice 4 : (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^{x-1} + 1.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A : étude de la fonction

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
   Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (x+1)e^{x-1}$.
4. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Partie B : recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a, qui passe par l'origine du repère.

1. On appelle T_a la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a. Donner une équation de T_a.
2. Démontrer qu'une tangente à $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si a vérifie l'égalité

$$1 - a^2e^{a-1} = 0.$$

3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0; +\infty[$ de l'équation

$$1 - x^2e^{x-1} = 0.$$

4. Donner alors une équation de la tangente recherchée.

Partie C : étude des points d'inflexion

1. Calculer $f''(x)$.
2. Démontrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion dont on précisera les coordonnées.