Correction de l'Exercice 1

Partie A

La fonction f est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = 0{,}5t\mathrm{e}^{-0{,}5t}$.

1. **Étude de la limite en $+\infty$:**

   On peut écrire $f(t) = \dfrac{0{,}5t}{\mathrm{e}^{0{,}5t}}$. Posons le changement de variable $X = 0{,}5t$. Quand $t \to +\infty$, alors $X \to +\infty$. On a $t = 2X$, donc :

   $$f(t) = 0{,}5(2X)\mathrm{e}^{-X} = X\mathrm{e}^{-X} = \frac{X}{\mathrm{e}^X}.$$

   Or, par croissances comparées, on sait que $\lim_{X\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$. Par passage à l'inverse, on en déduit que :

   $$\lim_{X\to+\infty} \frac{X}{\mathrm{e}^X} = 0.$$

   Ainsi, on conclut que :

   $$\boxed{\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0}$$

2. **Variations de la fonction f :**

   La fonction f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables. Posons $u(t) = 0{,}5t$ et $v(t) = \mathrm{e}^{-0{,}5t}$. On a $u'(t) = 0{,}5$ et $v'(t) = -0{,}5\mathrm{e}^{-0{,}5t}$.

   Pour tout $t \geqslant 0$:

   $$\begin{aligned} f'(t) &= u'(t)v(t) + u(t)v'(t) \\ &= 0{,}5 \times \mathrm{e}^{-0{,}5t} + 0{,}5t \times (-0{,}5\mathrm{e}^{-0{,}5t}) \\ &= 0{,}5\mathrm{e}^{-0{,}5t} - 0{,}25t\mathrm{e}^{-0{,}5t} \\ &= 0{,}5\mathrm{e}^{-0{,}5t}(1 - 0{,}5t) \end{aligned}$$

   Pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$, $0{,}5\mathrm{e}^{-0{,}5t} > 0$. Le signe de $f'(t)$ ne dépend donc que du signe de $1 - 0{,}5t$.

   $$1 - 0{,}5t \geqslant 0 \iff 1 \geqslant 0{,}5t \iff 2 \geqslant t.$$

   On calcule l'image du maximum : $f(2) = 0{,}5 \times 2 \times \mathrm{e}^{-0{,}5\times 2} = 1 \times \mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}37$.

t	0		2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Partie B

L'équation différentielle est $(E) : y' + 0{,}5y = 0{,}5\mathrm{e}^{-0{,}5t}$.

1. (a) **Recherche d'une solution particulière :**

Soit $u(t) = at\mathrm{e}^{-0{,}5t}$. La fonction u est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.

$$u'(t) = a(1 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5t} + t \cdot (-0{,}5)\mathrm{e}^{-0{,}5t}) = a\mathrm{e}^{-0{,}5t}(1 - 0{,}5t).$$

La fonction u est solution de (E) si et seulement si pour tout $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} u'(t) + 0{,}5u(t) &= 0{,}5\mathrm{e}^{-0{,}5t} \\ \left[a\mathrm{e}^{-0{,}5t}(1-0{,}5t)\right] + 0{,}5\left[at\mathrm{e}^{-0{,}5t}\right] &= 0{,}5\mathrm{e}^{-0{,}5t} \\ a\mathrm{e}^{-0{,}5t} - 0{,}5at\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 0{,}5at\mathrm{e}^{-0{,}5t} &= 0{,}5\mathrm{e}^{-0{,}5t} \\ a\mathrm{e}^{-0{,}5t} &= 0{,}5\mathrm{e}^{-0{,}5t} \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients, on obtient $\boxed{a = 0{,}5}$.

La fonction solution particulière est donc $u(t) = 0{,}5t\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ (ce qui correspond à la fonction f de la Partie A).

(b) **Résolution de l'équation homogène :**

L'équation homogène associée est $(E_0) : y' + 0{,}5y = 0$, soit $y' = -0{,}5y$. Les solutions sont de la forme $t \mapsto K\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Solutions de } (E_0) : y_0(t) = K\mathrm{e}^{-0{,}5t}, K \in \mathbb{R}}$$

(c) **Solutions générales de (E) :**

Les solutions de (E) sont la somme de la solution particulière u et des solutions de l'équation homogène.

$$g(t) = K\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 0{,}5t\mathrm{e}^{-0{,}5t} = \boxed{(K + 0{,}5t)\mathrm{e}^{-0{,}5t}} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

2. **Condition initiale :**

À $t = 0$, la quantité de principe actif est nulle, donc $g(0) = 0$.

$$\begin{aligned} g(0) &= (K + 0{,}5 \times 0)\mathrm{e}^{-0{,}5\times 0} \\ 0 &= (K + 0) \times 1 \\ K &= 0 \end{aligned}$$

La solution unique vérifiant la condition initiale est donc $g(t) = 0{,}5t\mathrm{e}^{-0{,}5t}$, ce qui correspond exactement à la fonction f définie à la Partie A.

3. **Étude du script Python :**

a) D'après la partie A, la fonction f est décroissante sur $[2\,;\,+\infty[$ et $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$. Comme $f(2) \approx 0{,}37 > 0{,}1$ et que f tend vers 0, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (ou simplement par continuité et limite), la courbe de f finira nécessairement par passer en dessous de la valeur $0{,}1$. La condition `while f(n) > 0.1` deviendra donc fausse à partir d'un certain rang, et la boucle s'arrêtera. La fonction renverra bien une valeur.

b) On teste les valeurs entières successives à partir de $n = 3$:

- Pour $n = 3$: $f(3) = 1{,}5\mathrm{e}^{-1{,}5} \approx 0{,}33 > 0{,}1$. (On entre dans la boucle, n devient 4).
- Pour $n = 4$: $f(4) = 2\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}27 > 0{,}1$. (On continue, n devient 5).
- Pour $n = 5$: $f(5) = 2{,}5\mathrm{e}^{-2{,}5} \approx 0{,}20 > 0{,}1$. ($n \to 6$).
- Pour $n = 6$: $f(6) = 3\mathrm{e}^{-3} \approx 0{,}149 > 0{,}1$. ($n \to 7$).
- Pour $n = 7$: $f(7) = 3{,}5\mathrm{e}^{-3{,}5} \approx 0{,}105 > 0{,}1$. (Condition vraie, n devient 8).
- Pour $n = 8$: $f(8) = 4\mathrm{e}^{-4} \approx 0{,}073$. Or $0{,}073 < 0{,}1$.

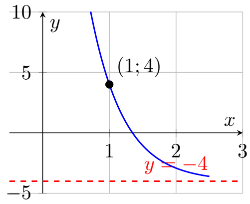
La condition `while` devient fausse. La boucle s'arrête et la fonction renvoie la valeur courante de n.

$$\boxed{\text{La fonction renvoie } 8}$$

c) La fonction `med` renvoie le premier entier n (en heures) pour lequel la quantité de médicament dans le sang devient inférieure ou égale à $0{,}1$ mg. L'absorption a lieu à 8 h. Puisque la fonction renvoie 8, cela signifie que le médicament devient inefficace (ou sa quantité négligeable) 8 heures après la prise. Elle permet de répondre à la question : « **À partir de quelle heure (entière) la quantité de principe actif sera-t-elle inférieure ou égale à 0,1 mg ?** » (Réponse concrète : 8h $+$ 8h $=$ 16h, soit 16 h 00).

Correction de l'Exercice 2

1. **Équation différentielle** $(E_1) : y' + 2y = -8$**.**

a) Résoudre (E_1).	**Détail :** L'équation homogène est $y' + 2y = 0 \Rightarrow y_0 = K\mathrm{e}^{-2x}$. Solution particulière constante $y_p = C : 0 + 2C = -8 \Rightarrow C = -4$. Solution générale : $y = y_0 + y_p$. **Réponse :** $\boxed{y(x) = K\mathrm{e}^{-2x} - 4}$ avec $K \in \mathbb{R}$.
b) Solution f telle que $f(1) = 4$.	**Détail :** $f(1) = K\mathrm{e}^{-2} - 4 = 4$ $\iff K\mathrm{e}^{-2} = 8$ $\iff K = \dfrac{8}{\mathrm{e}^{-2}} = 8\mathrm{e}^{2}$. Donc $f(x) = 8\mathrm{e}^{2}\mathrm{e}^{-2x} - 4$. **Réponse :** $\boxed{f(x) = 8\mathrm{e}^{2-2x} - 4}$
c) Allure de la courbe	 **Asymptote :** $y = -4$ en $+\infty$.

2. **Équation différentielle** $(E_2) : y' - y = 2\cos(x) + 4\sin(x)$**.**

a) Solution particulière $y_p(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$.	**Calculs :** $y_p'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x)$. On injecte dans (E_2) : $(-a\sin x + b\cos x) - (a\cos x + b\sin x)$ $= (b-a)\cos x + (-a-b)\sin x$. Par identification avec $2\cos x + 4\sin x$: **Système vérifié par a et b :** $$\begin{cases} b - a = 2 \\ -a - b = 4 \end{cases}$$ **Résolution :** Somme : $-2a = 6 \implies a = -3$. Substitution : $b - (-3) = 2 \implies b = -1$. **Réponse :** $$\boxed{y_p(x) = -3\cos(x) - \sin(x)}$$
b) Ensemble des solutions de (E_2).	**Détail :** Équation homogène $y' - y = 0 \implies y_0 = K\mathrm{e}^x$. Solution générale = homogène + particulière. **Réponse :** $$\boxed{y(x) = K\mathrm{e}^x - 3\cos(x) - \sin(x)}$$ avec $K \in \mathbb{R}$.