Exercice 1 (5 points)

a) Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'équation $2\cos(x) + 1 = 0$.

$$2\cos(x) + 1 = 0 \iff 2\cos(x) = -1 \iff \cos(x) = -\frac{1}{2}.$$

On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Le cosinus est négatif dans les quadrants 2 et 3. Les solutions dans $[0; 2\pi]$ sont donc $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ et $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

$$\boxed{S = \left\{ \frac{2\pi}{3} \,;\, \frac{4\pi}{3} \right\}}$$

b) Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'inéquation $\sin(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On cherche d'abord où $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Sur $[-\pi; \pi]$, c'est en $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$. Graphiquement, on cherche les points du cercle dont l'ordonnée est strictement inférieure à $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Attention à l'intervalle $[-\pi; \pi]$: on part de $-\pi$, on fait tout le tour jusqu'à π.

$$\boxed{S = \left[-\pi \,;\, \frac{\pi}{4} \right[\cup \left] \frac{3\pi}{4} \,;\, \pi \right]}$$

c) Dérivée de $f(x) = 3x\cos(5x + 2)$.

C'est une forme (uv) avec $u(x) = 3x$ et $v(x) = \cos(5x + 2)$.

- $u'(x) = 3$
- $v'(x) = -5\sin(5x + 2)$ (dérivée de fonction composée)

$f'(x) = u'v + uv' = 3\cos(5x + 2) + 3x \times (-5\sin(5x + 2))$.

$$\boxed{f'(x) = 3\cos(5x + 2) - 15x\sin(5x + 2)}$$

d) Dérivée de $g(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(x) + 5}$.

C'est une forme $\left(\frac{u}{v}\right)$ avec $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \sin(x) + 5$.

- $u'(x) = \cos(x)$
- $v'(x) = \cos(x)$

$g'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{\cos(x)(\sin(x) + 5) - \sin(x)\cos(x)}{(\sin(x) + 5)^2} = \frac{\cos(x)\sin(x) + 5\cos(x) - \sin(x)\cos(x)}{(\sin(x) + 5)^2}$.

$$\boxed{g'(x) = \frac{5\cos(x)}{(\sin(x) + 5)^2}}$$

Exercice 2 (4 points)

1. **La fonction g définie par $g(x) = \sin(2x)$ est-elle concave sur $]\frac{\pi}{2}; \pi[$?**

   Calculons la dérivée seconde de g. $g'(x) = 2\cos(2x)$. $g''(x) = -4\sin(2x)$.

   Étudions le signe de $g''(x)$ sur $]\frac{\pi}{2}; \pi[$. Si $x \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$, alors $2x \in]\pi; 2\pi[$. Or, sur $]\pi; 2\pi[$, la fonction sinus est strictement négative ($\sin(2x) < 0$). Donc $-4\sin(2x) > 0$.

   Comme $g''(x) > 0$ sur cet intervalle, la fonction g est convexe. **La fonction n'est donc pas concave.**

2. **Déterminer une primitive H sur $]0; \pi[$ de $h(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.**

   On reconnaît la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \sin(x)$ (dont la dérivée est $\cos(x)$). Les primitives sont de la forme $\ln(|u(x)|)$. Sur $]0; \pi[$, $\sin(x) > 0$, donc $|\sin(x)| = \sin(x)$.

$$\boxed{H(x) = \ln(\sin(x))}$$

3. **Résoudre l'inéquation $\sqrt{2} - 2\cos(x) \geq 0$ sur $[0; 2\pi]$.**

$$\sqrt{2} - 2\cos(x) \geq 0 \iff -2\cos(x) \geq -\sqrt{2} \iff \cos(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

   (On change le sens de l'inégalité en divisant par -2). Sur le cercle trigonométrique, les angles ayant un cosinus égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$ (ou $-\frac{\pi}{4}$). On cherche la zone "à gauche" de l'abscisse $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\boxed{S = \left[\frac{\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4}\right]}$$

Exercice 3 (4 points)

Soit $h(x) = \sin(x) - (\sin(x))^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. **Prouver que $h'(x) = \cos(x)(1 - 2\sin(x))$.**

   Dérivons terme à terme. La dérivée de $\sin(x)$ est $\cos(x)$. Pour $(\sin(x))^2$, on utilise la formule $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ avec $u = \sin(x)$ et $n = 2$.

$$\left((\sin(x))^2\right)' = 2 \times \cos(x) \times \sin(x).$$

   Donc :

$$h'(x) = \cos(x) - 2\cos(x)\sin(x).$$

   On factorise par $\cos(x)$:

$$h'(x) = \cos(x)(1 - 2\sin(x)). \quad \text{CQFD.}$$

2. **Dresser le tableau de variations de h sur $[0; 2\pi]$.**

   On étudie le signe de $h'(x)$ sur $[0; 2\pi]$:

   - Signe de $\cos(x)$: Positif sur $[0; \pi/2[\cup]3\pi/2; 2\pi]$, nul en $\pi/2$ et $3\pi/2$, négatif ailleurs.
   - Signe de $1 - 2\sin(x)$: $1 - 2\sin(x) \geq 0 \iff 1 \geq 2\sin(x) \iff \sin(x) \leq \frac{1}{2}$. Sur $[0; 2\pi]$, $\sin(x) \leq 1/2$ pour $x \in [0; \pi/6] \cup [5\pi/6; 2\pi]$.

   Valeurs annulatrices : $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ (pour le cosinus) et $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ (pour la parenthèse).

   Calculons les images clés :

   - $h(0) = \sin(0) - \sin^2(0) = 0$
   - $h(\pi/6) = 1/2 - (1/2)^2 = 1/4$
   - $h(\pi/2) = 1 - 1^2 = 0$
   - $h(5\pi/6) = 1/2 - (1/2)^2 = 1/4$
   - $h(3\pi/2) = -1 - (-1)^2 = -2$
   - $h(2\pi) = 0$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$1 - 2\sin(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

Exercice 4 **(6 points)**

1. (a) **Exprimer BH, OH, BC, AH en fonction de α.**

   Dans le triangle OBH rectangle en H :

   - $\sin(\alpha) = \frac{BH}{OB} = \frac{BH}{1} \implies \boxed{BH = \sin(\alpha)}$.
   - $\cos(\alpha) = \frac{OH}{OB} = \frac{OH}{1} \implies \boxed{OH = \cos(\alpha)}$.

   Le triangle ABC étant isocèle en A et H étant le pied de la hauteur issue de A, H est le milieu de $[BC]$.

$$\boxed{BC = 2 \times BH = 2\sin(\alpha)}$$

   Les points A, O, H sont alignés (car ABC est isocèle, la hauteur est axe de symétrie passant par le centre du cercle). Comme H est sur le segment $[OA]$ (ou dans son prolongement, ici O est entre A et H car $\alpha \in [0; \pi/2]$), on a $AH = AO + OH$ avec $AO = 1$ (rayon).

$$\boxed{AH = 1 + \cos(\alpha)}$$

(b) **Calculer l'aire du triangle ABC.**

$\mathcal{A}(\alpha) = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{BC \times AH}{2}$.

$$\mathcal{A}(\alpha) = \frac{2\sin(\alpha) \times (1 + \cos(\alpha))}{2} = \boxed{\sin(\alpha)(1 + \cos(\alpha))}$$

2. On étudie $f(x) = \sin(x)(1 + \cos(x))$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

(a) **Dérivée de f.**

$f(x) = \sin(x) + \sin(x)\cos(x)$. Dérivons. La dérivée de $\sin(x)$ est $\cos(x)$. La dérivée de $\sin(x)\cos(x)$ est $\cos(x)\cos(x) + \sin(x)(-\sin(x)) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

Donc $f'(x) = \cos(x) + \cos^2(x) - \sin^2(x)$. Or, on sait que $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$.

$$f'(x) = \cos(x) + \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = \cos(x) + \cos^2(x) - 1 + \cos^2(x)$$

$$\boxed{f'(x) = 2\cos^2(x) + \cos(x) - 1}$$

(b) **Factorisation.**

Développons $2(\cos(x) + 1)(\cos(x) - \frac{1}{2})$:

$$= 2\left(\cos^2(x) - \frac{1}{2}\cos(x) + \cos(x) - \frac{1}{2}\right) = 2\cos^2(x) - \cos(x) + 2\cos(x) - 1 = 2\cos^2(x) + \cos(x) - 1$$

On retrouve bien l'expression de $f'(x)$.

(c) **Signe de $\cos(x) + 1$.**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \geq -1$, donc $\cos(x) + 1 \geq 0$. Sur $[0; \pi/2]$, $\cos(x) \in [0; 1]$, donc $\cos(x) + 1$ est strictement positif.

(d) **Résolution et signe de $f'(x)$.**

$\cos(x) - \dfrac{1}{2} > 0 \iff \cos(x) > \dfrac{1}{2}$. Sur $[0; \pi/2]$, cela correspond à $x \in [0; \frac{\pi}{3}[$.

Le signe de $f'(x)$ dépend du produit $2\underbrace{(\cos(x) + 1)}_{+}(\cos(x) - 1/2)$. Il est donc du signe de $\cos(x) - 1/2$.

- $f'(x) > 0$ sur $[0; \dfrac{\pi}{3}[$.
- $f'(x) = 0$ pour $x = \dfrac{\pi}{3}$.
- $f'(x) < 0$ sur $]\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}]$.

(e) **Tableau de variation de f.**

Calcul des images :

- $f(0) = \sin(0)(1+1) = 0$.
- $f(\pi/3) = \sin(\pi/3)(1+\cos(\pi/3)) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.
- $f(\pi/2) = \sin(\pi/2)(1+\cos(\pi/2)) = 1 \times (1+0) = 1$.

x	0		$\dfrac{\pi}{3}$		$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	1

(f) **Conclusion.**

L'aire du triangle ABC est modélisée par la fonction f (avec $x = \alpha$). D'après le tableau de variations, le maximum est atteint pour $x = \dfrac{\pi}{3}$.

$$\boxed{\text{L'aire est maximale pour } \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}}$$

(Remarque : Cela correspond à un triangle équilatéral, car ABC est isocèle en A avec un angle au sommet de $2 \times \pi/6 = \pi/3$).