Exercice 1 : Calcul intégral (10 points)

1. **Valeur moyenne**

   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[2\,;\,5]$. La valeur moyenne M est donnée par la formule :
   $$M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$
   Ici, $a = 2$ et $b = 5$. Une primitive de $f(x) = 9x^2 + 4x$ est $F(x) = 3x^3 + 2x^2$.
   $$\begin{aligned} M &= \frac{1}{5-2}\int_2^5 (9x^2+4x)\,dx \\ &= \frac{1}{3}\left[3x^3+2x^2\right]_2^5 \\ &= \frac{1}{3}\left((3\times125+2\times25)-(3\times8+2\times4)\right) \\ &= \frac{1}{3}\left((375+50)-(24+8)\right) \\ &= \frac{1}{3}(425-32) = \frac{393}{3} \end{aligned}$$
   Conclusion : La valeur moyenne est $\boxed{M = 131}$.

2. **Calcul d'intégrales**

   - **Calcul de I :** $I = \int_{-1}^{2} x\mathrm{e}^{x^2-3}\,dx$. On reconnaît la forme $\frac{1}{2}u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = x^2 - 3$, donc $u'(x) = 2x$.
   $$I = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} 2x\mathrm{e}^{x^2-3}\,dx = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{x^2-3}\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{4-3}-\mathrm{e}^{1-3}) = \boxed{\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-2}}{2}}$$
   - **Calcul de J :** $J = \int_1^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx$. On reconnaît la forme $\frac{1}{2}\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1$, positif sur $[1\,;\,2]$.
   $$J = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_1^2 = \frac{1}{2}(\ln(5)-\ln(2)) = \boxed{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right)}$$
   - **Calcul de K :** $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin(2x)-1)\,dx$. Une primitive de $x \mapsto \sin(ax+b)$ est $x \mapsto -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$.
   $$K = \left[-\frac{1}{2}\cos(2x) - x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
   $$K = \left(-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{1}{2}\cos(0)-0\right) = \left(0-\frac{\pi}{4}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}}$$

3. **Encadrement d'intégrale**

   D'après le tableau de variations, la fonction g est croissante sur l'intervalle $[-5\,;\,3]$ (car elle croît de -5 à 3 sur l'axe des abscisses).

On lit dans le tableau : $g(-5) = 2$ et $g(3) = 4$.

Ainsi, pour tout $x \in [-5\,;\,3]$, on a $2 \leqslant g(x) \leqslant 4$.

En appliquant la propriété de conservation de l'ordre de l'intégrale (positivité) sur l'intervalle d'amplitude $3 - (-5) = 8$:

$$\int_{-5}^{3} 2\,dx \leqslant \int_{-5}^{3} g(x)\,dx \leqslant \int_{-5}^{3} 4\,dx$$

$$2 \times 8 \leqslant S \leqslant 4 \times 8$$

Conclusion : Le meilleur encadrement est $\boxed{16 \leqslant S \leqslant 32}$.

4. **Intégration par parties**

   Soit $L = \int_{-1}^{1} (t+3)\mathrm{e}^{2t}\,dt$. On pose :

$$\begin{cases} u(t) = t + 3 \\ v'(t) = \mathrm{e}^{2t} \end{cases} \implies \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} \end{cases}$$

   Les fonctions u et v sont dérivables et leurs dérivées continues sur $[-1\,;\,1]$. D'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} L &= \left[(t+3) \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 1 \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\,dt \\ &= \left(4 \times \frac{\mathrm{e}^{2}}{2}\right) - \left(2 \times \frac{\mathrm{e}^{-2}}{2}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\right]_{-1}^{1} \\ &= 2\mathrm{e}^{2} - \mathrm{e}^{-2} - \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{2} - \mathrm{e}^{-2}\right) \\ &= 2\mathrm{e}^{2} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2} - \mathrm{e}^{-2} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2} \\ &= \boxed{\frac{7}{4}\mathrm{e}^{2} - \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2}} \end{aligned}$$

Exercice 2 : Aires et positions relatives (4 points)

1. Position relative des courbes

On étudie le signe de la différence $f(x) - g(x)$:

$$f(x) - g(x) = (x^2 - 2) - x = x^2 - x - 2$$

C'est un polynôme du second degré. Calculons le discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-2) = 1 + 8 = 9$. Les racines sont $x_1 = \dfrac{1-3}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{1+3}{2} = 2$.

Le coefficient devant x^2 est positif ($a = 1$), donc $x^2 - x - 2$ est négatif entre les racines.

- Sur $[-1\,;\,2]$, $f(x) - g(x) \leqslant 0 \iff f(x) \leqslant g(x)$ (C_g est au-dessus de C_f).

- Sur $[2\,;\,2,5]$, $f(x)-g(x)\geqslant 0 \iff f(x)\geqslant g(x)$ (C_f est au-dessus de C_g).

2. Calcul de l'aire

Le domaine coloré se décompose en deux parties selon la position relative :

1. $\mathcal{A}_1$ sur $[-1\,;\,2]$ où $g(x)\geqslant f(x)$.
2. $\mathcal{A}_2$ sur $[2\,;\,2,5]$ où $f(x)\geqslant g(x)$.

Soit $\mathcal{A}_{totale}=\int_{-1}^{2}(g(x)-f(x))\,dx+\int_{2}^{2,5}(f(x)-g(x))\,dx$.

Déterminons une primitive de $h(x)=f(x)-g(x)=x^2-x-2$. $H(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-2x$.

- **Aire 1 :** $\int_{-1}^{2}(g(x)-f(x))\,dx=-\int_{-1}^{2}h(x)\,dx=-[H(x)]_{-1}^{2}=H(-1)-H(2)$.
- **Aire 2 :** $\int_{2}^{2,5}(f(x)-g(x))\,dx=[H(x)]_{2}^{2,5}=H(2,5)-H(2)$.

Calculs numériques :

- $H(2)=\dfrac{8}{3}-\dfrac{4}{2}-4=\dfrac{8}{3}-6=\dfrac{8-18}{3}=-\dfrac{10}{3}$.
- $H(-1)=\dfrac{-1}{3}-\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{-2-3+12}{6}=\dfrac{7}{6}$.
- $H(2,5)=H\left(\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{125}{24}-\dfrac{25}{8}-5=\dfrac{125-75-120}{24}=-\dfrac{70}{24}=-\dfrac{35}{12}$.

$\mathcal{A}_1=H(-1)-H(2)=\dfrac{7}{6}-\left(-\dfrac{10}{3}\right)=\dfrac{7}{6}+\dfrac{20}{6}=\dfrac{27}{6}=\dfrac{9}{2}=4,5$.

$\mathcal{A}_2=H(2,5)-H(2)=-\dfrac{35}{12}-\left(-\dfrac{10}{3}\right)=-\dfrac{35}{12}+\dfrac{40}{12}=\dfrac{5}{12}$.

Aire totale : $\mathcal{A}=\dfrac{9}{2}+\dfrac{5}{12}=\dfrac{54}{12}+\dfrac{5}{12}=\dfrac{59}{12}$ unités d'aire.

Conclusion : L'aire du domaine coloré est $\boxed{\dfrac{59}{12}\approx 4,92 \text{ u.a.}}$.

Exercice 3 : Suites d'intégrales (6 points)

On a $I_n=\int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^{nt}}{1+\mathrm{e}^t}\,dt$.

1. **Calcul de I_1**

$$I_1=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}\,dt$$

C'est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(t)=1+\mathrm{e}^t$.

$$I_1=\left[\ln(1+\mathrm{e}^t)\right]_0^1=\ln(1+\mathrm{e})-\ln(1+1)=\ln(1+\mathrm{e})-\ln(2)=\boxed{\ln\left(\frac{\mathrm{e}+1}{2}\right)}$$

2. **Calcul de I_0**

$$I_0+I_1=\int_0^1\frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\,dt+\int_0^1\frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}\,dt=\int_0^1\frac{1+\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}\,dt=\int_0^1 1\,dt=[t]_0^1=1$$

On en déduit : $I_0 = 1 - I_1$.

$$\boxed{I_0 = 1 - \ln\left(\frac{\mathrm{e}+1}{2}\right)}$$

3. **Relation de récurrence** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{nt} + \mathrm{e}^{(n+1)t}}{1+\mathrm{e}^t}\,dt = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{nt}(1+\mathrm{e}^t)}{1+\mathrm{e}^t}\,dt$$

En simplifiant par $(1+\mathrm{e}^t)$, qui est non nul :

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \mathrm{e}^{nt}\,dt = \left[\frac{1}{n}\mathrm{e}^{nt}\right]_0^1 = \frac{1}{n}(\mathrm{e}^n - \mathrm{e}^0) = \boxed{\frac{\mathrm{e}^n - 1}{n}}$$

4. **Calcul de I_2** On utilise la relation précédente pour $n = 1$:

$$I_1 + I_2 = \frac{\mathrm{e}^1 - 1}{1} = \mathrm{e} - 1$$

Donc $I_2 = (\mathrm{e} - 1) - I_1$.

$$\boxed{I_2 = \mathrm{e} - 1 - \ln\left(\frac{\mathrm{e}+1}{2}\right)}$$

5. **Expression de la différence**

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{(n+1)t} - \mathrm{e}^{nt}}{1+\mathrm{e}^t}\,dt$$

On factorise le numérateur par e^{nt} : $\mathrm{e}^{(n+1)t} - \mathrm{e}^{nt} = \mathrm{e}^{nt} \cdot \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{nt} = \mathrm{e}^{nt}(\mathrm{e}^t - 1)$.

$$\boxed{I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{nt}(\mathrm{e}^t - 1)}{1+\mathrm{e}^t}\,dt}$$

6. **Sens de variation** Pour tout $t \in [0\,;\,1]$, on a $t \geqslant 0$, donc la fonction exponentielle étant croissante, $\mathrm{e}^t \geqslant 1$, soit $\mathrm{e}^t - 1 \geqslant 0$. De plus, $\mathrm{e}^{nt} > 0$ et $1 + \mathrm{e}^t > 0$. L'intégrande est donc positive sur $[0\,;\,1]$. Par positivité de l'intégrale, on a $I_{n+1} - I_n \geqslant 0$, soit $I_{n+1} \geqslant I_n$.

   Conclusion : La suite (I_n) est **croissante**.