Exercice 1 : (10 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 9x^2 + 4x$.

   Déterminer la valeur moyenne M de la fonction f sur $[2\,;\,5]$.
2. Calculer les valeurs exactes des intégrales suivantes :

$$I = \int_{-1}^{2} x\mathrm{e}^{x^2-3}\,dx \qquad J = \int_{1}^{2} \frac{x}{x^2+1}\,dx \qquad K = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\sin(2x) - 1)\,dx$$

3. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[-10\,;\,10]$ dont le tableau de variations est donné ci-contre :

   Déterminer le meilleur encadrement possible de l'intégrale $S = \int_{-5}^{3} g(x)\,dx$.

x	-10		-5		3		10
$g(x)$	7	$\searrow$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	-6

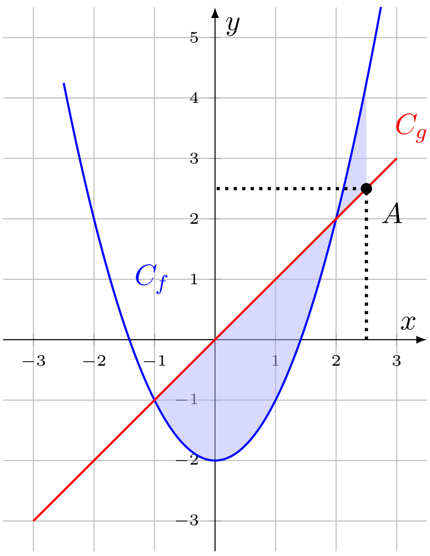
4. Déterminer, via une intégration par parties, l'intégrale suivante :

$$L = \int_{-1}^{1} (t+3)\mathrm{e}^{2t}\,dt$$

Exercice 2 : (4 points)

On a tracé dans le plan muni d'un repère orthonormé les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = x$.
Le point A a pour coordonnées $A(2,5\,;\,2,5)$.

Déterminer l'aire du domaine coloré en justifiant soigneusement la position relative des courbes.



Exercice 3 : (6 points)

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par : $I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{nt}}{1+\mathrm{e}^t}\,dt$.

1. Montrer que $I_1 = \ln\left(\frac{\mathrm{e}+1}{2}\right)$.
2. Calculer $I_0 + I_1$. En déduire I_0.
3. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $I_n + I_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^n - 1}{n}$.
4. Calculer la valeur exacte de I_2.
5. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{nt}(\mathrm{e}^t - 1)}{1+\mathrm{e}^t}\,dt$.
6. En déduire le sens de variation de la suite (I_n).