# Corrigé de l'évaluation

## Exercice I

1. **Réponse b. 0,16**
   Pour qu'un tableau représente une loi de probabilité, la somme des probabilités de toutes les issues doit être égale à 1. On doit donc avoir : $P(X=-1)+P(X=0)+P(X=3)=1$.

   En utilisant les valeurs du tableau, on obtient l'équation : $0,2+2a+3a=1$

   On résout cette équation :

$$\begin{aligned} & 0,2+5a=1 \\ \iff & 5a=1-0,2 \\ \iff & 5a=0,8 \\ \iff & a=\frac{0,8}{5} \\ \iff & a=0,16 \end{aligned}$$

   La valeur de $a$ est donc $\boxed{0,16}$.

2. **Réponse a. -0,4**
   L'espérance $E(Y)$ d'une variable aléatoire $Y$ se calcule avec la formule : $E(Y)=\sum_i y_i \times P(Y=y_i)$

   Ici, les valeurs $y_i$ sont $-2$, $0$ et $10$. On a donc :

$$\begin{aligned} E(Y) &= (-2)\times P(Y=-2)+0\times P(Y=0)+10\times P(Y=10) \\ E(Y) &= (-2)\times 0,7+0\times 0,2+10\times 0,1 \\ E(Y) &= -1,4+0+1 \\ E(Y) &= -0,4 \end{aligned}$$

   L'espérance de la variable $Y$ est donc $\boxed{-0,4}$.

3. **Réponse c. 21**
   La variance $V(Z)$ d'une variable aléatoire $Z$ est définie par la formule : $V(Z)=\sum p_i(z_i-E(Z))^2$.

   L'énoncé nous donne $E(Z)=-2$. Les valeurs de $Z$ sont $z_1=-5$, $z_2=0$ et $z_3=10$. On calcule d'abord les carrés des écarts à l'espérance :

   - $(z_1-E(Z))^2=(-5-(-2))^2=(-3)^2=9$
   - $(z_2-E(Z))^2=(0-(-2))^2=(2)^2=4$
   - $(z_3-E(Z))^2=(10-(-2))^2=(12)^2=144$

On peut maintenant appliquer la formule de la variance :

$$V(Z) = P(Z=-5)\times(z_1-E(Z))^2 + P(Z=0)\times(z_2-E(Z))^2 + P(Z=10)\times(z_3-E(Z))^2$$
$$V(Z) = 0,6\times 9 + 0,3\times 4 + 0,1\times 144$$
$$V(Z) = 5,4 + 1,2 + 14,4$$
$$V(Z) = 21$$

La variance de la variable $Z$ est donc $\boxed{21}$.

## Exercice II

1. On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

   (a) **Loi de probabilité de $X$**

   Le jeu contient 32 cartes au total.

   - L'issue $X = 0$ correspond aux 4 neuf, 4 huit et 4 sept, soit $4+4+4 = 12$ cartes. La probabilité est donc $P(X=0) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$.
   - L'issue $X = 5$ correspond aux 12 « figures ». La probabilité est donc $P(X=5) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$.
   - L'issue $X = 10$ correspond aux 4 dix et 4 as, soit $4+4 = 8$ cartes. La probabilité est donc $P(X=10) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

   On vérifie que la somme des probabilités est 1 : $\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4} = \frac{6}{8}+\frac{2}{8} = \frac{8}{8} = 1$.

   Le tableau complété est :

   | Valeur $k$ de $X$ | $0$ | $5$ | $10$ |
   |---|---|---|---|
   | $P(X=k)$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{4}$ |

   (b) **Espérance et écart type de $X$**

   Calcul de l'espérance $E(X)$ :

   $$E(X) = 0\times\frac{3}{8} + 5\times\frac{3}{8} + 10\times\frac{1}{4}$$
   $$E(X) = 0 + \frac{15}{8} + \frac{20}{8}$$
   $$E(X) = \frac{35}{8} = 4,375$$

   L'espérance de $X$ est $\boxed{E(X) = \frac{35}{8}}$.

   Calcul de l'écart type $\sigma(X)$ : On calcule d'abord la variance $V(X)$ en utilisant la formule $V(X) = \sum p_i(x_i - E(X))^2$. On a $E(X) = \frac{35}{8}$.

Calculons les carrés des écarts à l'espérance :

- Pour $x_1 = 0$ : $\left(0 - \frac{35}{8}\right)^2 = \left(-\frac{35}{8}\right)^2 = \frac{1225}{64}$
- Pour $x_2 = 5$ : $\left(5 - \frac{35}{8}\right)^2 = \left(\frac{40}{8} - \frac{35}{8}\right)^2 = \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64}$
- Pour $x_3 = 10$ : $\left(10 - \frac{35}{8}\right)^2 = \left(\frac{80}{8} - \frac{35}{8}\right)^2 = \left(\frac{45}{8}\right)^2 = \frac{2025}{64}$

On applique maintenant la formule de la variance :

$$V(X) = P(X=0) \times (x_1 - E(X))^2 + P(X=5) \times (x_2 - E(X))^2 + P(X=10) \times (x_3 - E(X))^2$$
$$V(X) = \frac{3}{8} \times \frac{1225}{64} + \frac{3}{8} \times \frac{25}{64} + \frac{1}{4} \times \frac{2025}{64}$$
$$V(X) = \frac{3675}{512} + \frac{75}{512} + \frac{1}{4}\left(\frac{256}{256}\right) \times \frac{2025}{64} \quad \text{(mise au dénominateur 512)}$$
$$V(X) = \frac{3675}{512} + \frac{75}{512} + \frac{2025 \times 2}{256 \times 2} \quad \text{(ou plus simple : } \frac{1}{4} = \frac{128}{512}\text{)}$$
$$V(X) = \frac{3675 + 75 + (128 \times 2025/64)}{512} = \frac{3750 + 2 \times 2025}{512} = \frac{3750 + 4050}{512}$$
$$V(X) = \frac{7800}{512} \quad \text{(on simplifie par 8)}$$
$$V(X) = \frac{975}{64}$$

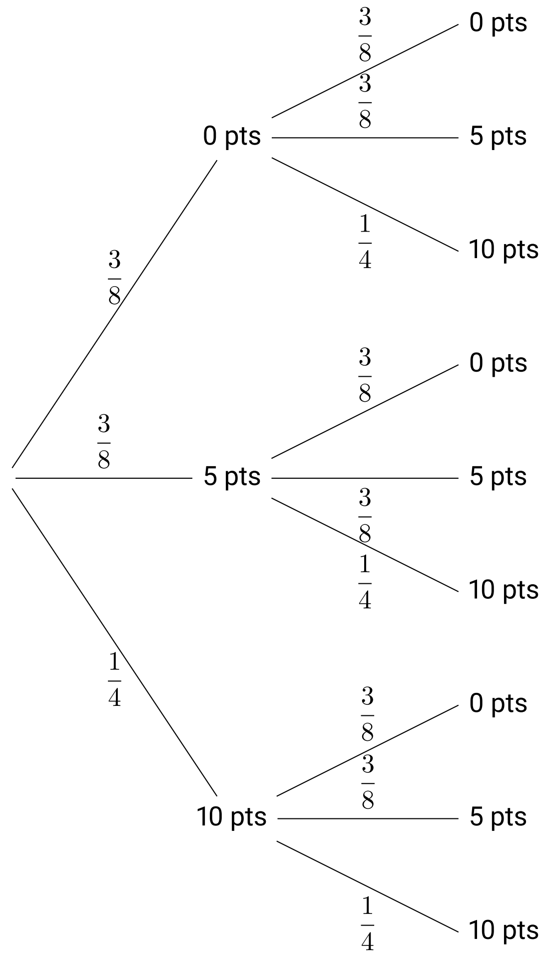
L'écart type est la racine carrée de la variance : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{975}{64}} = \frac{\sqrt{975}}{8}$.

Donc $\boxed{\sigma(X) = \frac{\sqrt{975}}{8} \approx 3,90}$.

2. Gaspard effectue deux tirages successifs avec remise.

   (a) **Arbre pondéré de l'expérience**

   Chaque tirage est indépendant et suit la loi de probabilité de $X$.




(b) **Valeurs prises par $Y$**

$Y$ est la somme des points des deux cartes. L'ensemble des valeurs prises par $Y$ est donc $Y(\Omega) = \{0, 5, 10, 15, 20\}$.

(c) **Loi de probabilité de $Y$**

On calcule la probabilité de chaque valeur de $Y$ en utilisant l'arbre (les tirages sont indépendants) :

- $P(Y = 0) = P(0; 0) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$
- $P(Y = 5) = P(0; 5) + P(5; 0) = 2 \times \left(\frac{3}{8} \times \frac{3}{8}\right) = \frac{18}{64}$
- $P(Y = 10) = P(0; 10) + P(10; 0) + P(5; 5) = 2 \times \left(\frac{3}{8} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{6}{32} + \frac{9}{64} = \frac{12}{64} + \frac{9}{64} = \frac{21}{64}$
- $P(Y = 15) = P(5; 10) + P(10; 5) = 2 \times \left(\frac{3}{8} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{6}{32} = \frac{12}{64}$
- $P(Y = 20) = P(10; 10) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} = \frac{4}{64}$

Tableau de la loi de probabilité de $Y$ :

| Valeur $k$ de $Y$ | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(Y = k)$ | $\frac{9}{64}$ | $\frac{18}{64}$ | $\frac{21}{64}$ | $\frac{12}{64}$ | $\frac{4}{64}$ |

3. **Jeu équitable**

   Soit $G$ la variable aléatoire représentant le gain algébrique de Gaspard.

   - Si $Y \geq 15$, Gaspard gagne 3 euros. $P(Y \geq 15) = P(Y = 15) + P(Y = 20) = \frac{12}{64} + \frac{4}{64} = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$.
   - Sinon ($Y < 15$), Gaspard verse $s$ euros (gain de $-s$). $P(Y < 15) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

   Un jeu est équitable si l'espérance de gain est nulle, $E(G) = 0$.

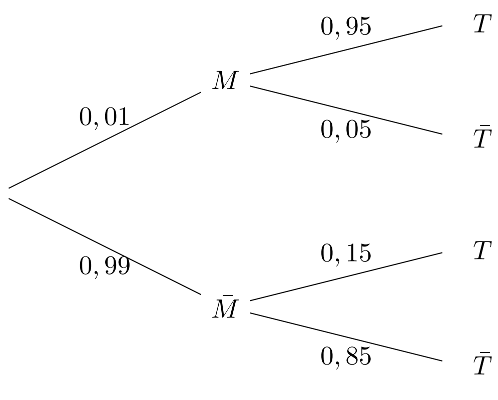
   $$E(G) = 3 \times P(Y \geq 15) + (-s) \times P(Y < 15) = 3 \times \frac{1}{4} - s \times \frac{3}{4}$$

   On résout $E(G) = 0 \iff 3 \times \frac{1}{4} - s \times \frac{3}{4} = 0 \iff \frac{3}{4} = s \times \frac{3}{4} \iff s = 1$. Pour que le jeu soit équitable, la somme $s$ doit être de $\boxed{1 \text{ euro}}$.

## Exercice III

On traduit les données : $P(M) = 0,01$, $P_M(T) = 0,95$ et $P_{\bar{M}}(\bar{T}) = 0,85$. On en déduit : $P(\bar{M}) = 0,99$, $P_M(\bar{T}) = 0,05$ et $P_{\bar{M}}(T) = 0,15$.

1. **Arbre pondéré**




2. (a) $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,01 \times 0,95 = \boxed{0,0095}$.

   (b) D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) \\ &= 0,0095 + P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(T) \\ &= 0,0095 + 0,99 \times 0,15 = 0,0095 + 0,1485 = \boxed{0,158}. \end{aligned}$$

3. On cherche $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0095}{0,158} \approx \boxed{0,0601}$.

4. Étude du coût.

   (a) Les valeurs possibles pour $X$ sont $\{0, 100, 1000\}$.

   (b) $P(X = 100) = P(T) = \boxed{0,158}$.

   (c) Loi de probabilité de $X$ :

   - $P(X = 100) = P(T) = 0,158$.
   - $P(X = 1000) = P(M \cap \bar{T}) = 0,01 \times 0,05 = 0,0005$.
   - $P(X = 0) = P(\bar{M} \cap \bar{T}) = 0,99 \times 0,85 = 0,8415$.

| Coût $k$ en euros | $0$ | $100$ | $1000$ |
|---|---|---|---|
| $P(X = k)$ | $0,8415$ | $0,1580$ | $0,0005$ |

   (d) $E(X) = 0 \times 0,8415 + 100 \times 0,1580 + 1000 \times 0,0005 = 15,8 + 0,5 = \boxed{16,30 \text{ euros}}$. En moyenne, le coût par animal est de 16,30 euros.

   (e) Coût total estimé = $200 \times E(X) = 200 \times 16,3 = \boxed{3260 \text{ euros}}$.