Exercice I

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse ne rapportent, ni n'enlèvent aucun point.

1. Voici la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Valeur k de X	-1	0	3
$P(X=k)$	$0,2$	$2a$	$3a$

La valeur a est égale à :

a) $0,1$ b) $0,16$ c) $0,4$ d) $0,8$

2. Voici la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.

Valeur k de Y	-2	0	10
$P(Y=k)$	$0,7$	$0,2$	$0,1$

Alors l'espérance de la variable Y est égale à :

a) $-0,4$ b) $2,4$ c) $12,64$ d) $3,555$

3. Voici la loi de probabilité de la variable aléatoire Z.

Valeur k de Z	-5	0	10
$P(Z=k)$	$0,6$	$0,3$	$0,1$

On donne $E(Z)=-2$. Alors la variance de la variable Z est égale à :

a) $4,58$ b) $\sqrt{21}$ c) 21 d) 25

Exercice II

Un jeu de 32 cartes est composé :

- 12 « figures » qui valent 5 points chacune;
- 4 neuf, 4 huit et 4 sept qui valent 0 point chacune;
- 4 dix et 4 as qui valent 10 points chacune.

1. On choisi une carte au hasard dans le jeu. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus.

(a) Compléter le tableau suivant (loi de probabilité de X).

Valeur k de X	0	5	10
$P(X=k)$			

(b) Calculer l'espérance $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de la variable X.

2. Gaspard choisit une carte au hasard, la remet dans le puis en reprend une autre au hasard. On note Y la somme des points obtenues.

   (a) Représenter cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre.

   (b) Quelles sont les valeurs prises par Y.

   (c) Déterminer la loi de probabilité de Y.

3. Si la somme obtenue par Gaspard est supérieur ou égale à 15, Carla lui verse 3 euros. Sinon c'est Carla qui verse une somme, notée s, à Gaspard. Quelle doit être la valeur de la somme s pour que ce jeu soit équitable.

Exercice III

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à $0,0001$ près.

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir; sinon la maladie est mortelle. Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont $1\,\%$ est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans $95\,\%$ des cas;
- si un animal est sain, le test est négatif dans $85\,\%$ des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note :

- M l'évènement : « l'animal est porteur de la maladie »;
- $\bar{M}$ l'évènement : « l'animal est sain »;
- T l'évènement : « le test est positif »;
- $\bar{T}$ l'évènement : « le test est négatif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. Un animal est choisi au hasard.

   (a) Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?

   (b) Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est $0,158$.

3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?
4. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.

   On note X la variable aléatoire qui correspond au coût engagé pour un animal subissant le test.

   (a) Quelles sont les valeurs possibles de X ?

   (b) Déterminer $P(X = 100)$. Interpréter le résultat.

   (c) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?

   (d) Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X. Interpréter le résultat.

   (e) Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?