

Exercice 1 (3 points)

a) Pour simplifier cette expression, on utilise les propriétés de l'exponentielle :

$$(e^a)^b = e^{ab}, e^a \times e^b = e^{a+b} \text{ et } \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}.$$

$$\begin{aligned} \frac{e^{x^2} \times (e^x)^2}{e^{(x+1)^2}} &= \frac{e^{x^2} \times e^{2x}}{e^{x^2+2x+1}} \\ &= \frac{e^{x^2+2x}}{e^{x^2+2x+1}} \\ &= e^{(x^2+2x)-(x^2+2x+1)} \\ &= e^{-1} \end{aligned}$$

Le résultat est $\boxed{e^{-1}}$.

b) On utilise la propriété $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$.

$$\begin{aligned} \frac{e^{3+x}}{e^{3-x}} &= e^{(3+x)-(3-x)} \\ &= e^{3+x-3+x} \\ &= e^{2x} \end{aligned}$$

Le résultat est $\boxed{e^{2x}}$.

c) On combine les propriétés $e^a \times e^b = e^{a+b}$ et $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$.

$$\begin{aligned} \frac{e^{2x+4} \times e^{-x+1}}{e^{x+5}} &= \frac{e^{(2x+4)+(-x+1)}}{e^{x+5}} \\ &= \frac{e^{x+5}}{e^{x+5}} \\ &= e^{(x+5)-(x+5)} \\ &= e^0 = 1 \end{aligned}$$

Le résultat est $\boxed{1}$.

Exercice 2 (5 points)

a) On simplifie d'abord le membre de gauche :

$$\begin{aligned} e^{-7x} \times e^{2x+8} &= e^{-x+3} \iff e^{-7x+2x+8} = e^{-x+3} \\ &\iff e^{-5x+8} = e^{-x+3} \end{aligned}$$

La fonction exponentielle étant bijective ($e^A = e^B \iff A = B$), l'équation devient :

$$\begin{aligned} -5x + 8 &= -x + 3 \iff -4x = -5 \\ &\iff x = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $S = \left\{ \frac{5}{4} \right\}$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{e^{3x-1}}{e^{-5x+4}} = 1 &\iff e^{(3x-1)-(-5x+4)} = 1 \\ &\iff e^{3x-1+5x-4} = 1 \\ &\iff e^{8x-5} = 1 \end{aligned}$$

Sachant que $e^0 = 1$, on a $e^A = 1 \iff A = 0$:

$$\begin{aligned} 8x - 5 = 0 &\iff 8x = 5 \\ &\iff x = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $S = \left\{ \frac{5}{8} \right\}$.

$$\begin{aligned} \text{c) } (e^{3x})^2 \times e^{x^2+5} = 1 &\iff e^{6x} \times e^{x^2+5} = 1 \\ &\iff e^{x^2+6x+5} = 1 \\ &\iff e^{x^2+6x+5} = e^0 \\ &\iff x^2 + 6x + 5 = 0 \end{aligned}$$

C'est une équation du second degré.

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4(1)(5) = 36 - 20 = 16$. $\sqrt{\Delta} = 4$.

Les racines sont $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - 4}{2} = -5$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + 4}{2} = -1$.

L'ensemble des solutions est $S = \{-5; -1\}$.

$$\text{d) On réécrit l'équation. } e^{1-x} - e^{2x^2} = 0 \iff e^{1-x} = e^{2x^2}.$$

Cela équivaut à $1 - x = 2x^2$, soit $2x^2 + x - 1 = 0$.

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9$. $\sqrt{\Delta} = 3$.

Les racines sont $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 3}{4} = -1$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

L'ensemble des solutions est $S = \left\{ -1; \frac{1}{2} \right\}$.

Exercice 3 (6 points)

$$\text{a) On réécrit l'inéquation en utilisant } 1 = e^0. \quad e^{x^2+6x+5} \geq 1 \iff e^{x^2+6x+5} \geq e^0.$$

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $e^A \geq e^B \iff A \geq B$.

L'inéquation est équivalente à $x^2 + 6x + 5 \geq 0$.

Nous avons déjà trouvé les racines de ce polynôme dans l'exercice 2.c) : $x_1 = -5$ et $x_2 = -1$.

Le polynôme est du signe de $a = 1$ (positif) à l'extérieur des racines.

L'ensemble des solutions est $S =]-\infty; -5] \cup [-1; +\infty[$.

b) On utilise $e = e^1$:

$$e^{-x^2-3x+5} > e \iff e^{-x^2-3x+5} > e^1 \iff -x^2 - 3x + 5 > 1 \iff -x^2 - 3x + 4 > 0.$$

On cherche les racines du polynôme $-x^2 - 3x + 4$:

$$\Delta = (-3)^2 - 4(-1)(4) = 9 + 16 = 25. \sqrt{\Delta} = 5.$$

$$\text{Les racines sont } x_1 = \frac{3-5}{-2} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{3+5}{-2} = -4.$$

Le polynôme est du signe de $a = -1$ (négatif) à l'extérieur des racines, donc il est positif entre les racines.

L'ensemble des solutions est $S =]-4; 1[$.

$$\begin{aligned} \text{c) } e^{2x^2-3x-1} &\leq (e^4)^2 \iff e^{2x^2-3x-1} \leq e^8 \\ &\iff 2x^2 - 3x - 1 \leq 8 \\ &\iff 2x^2 - 3x - 9 \leq 0. \end{aligned}$$

On cherche les racines de $2x^2 - 3x - 9$.

$$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(-9) = 9 + 72 = 81. \sqrt{\Delta} = 9.$$

$$\text{Les racines sont } x_1 = \frac{3-9}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \text{ et } x_2 = \frac{3+9}{4} = \frac{12}{4} = 3.$$

Le polynôme est du signe de $a = 2$ (positif) à l'extérieur des racines, donc il est négatif ou nul entre les racines.

L'ensemble des solutions est $S = \left[-\frac{3}{2}; 3\right]$.

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{e^{x^2} \times (e^{-5})^3}{(e^x)^2} &\leq 1 \iff \frac{e^{x^2} \times e^{-15}}{e^{2x}} \leq 1 \\ &\iff e^{x^2-15-2x} \leq 1 \\ &\iff e^{x^2-2x-15} \leq e^0 \\ &\iff x^2 - 2x - 15 \leq 0 \end{aligned}$$

On cherche les racines de $x^2 - 2x - 15$: $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-15) = 4 + 60 = 64. \sqrt{\Delta} = 8.$

$$\text{Les racines sont } x_1 = \frac{2-8}{2} = -3 \text{ et } x_2 = \frac{2+8}{2} = 5.$$

Le polynôme est du signe de $a = 1$ (positif) à l'extérieur des racines, donc il est négatif ou nul entre les racines.

L'ensemble des solutions est $S = [-3; 5]$.

Exercice 4 (6 points)

a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^{12x+5}}{x^3}$.

Elle est de la forme $\frac{u}{v}$, avec : $u(x) = e^{12x+5} \implies u'(x) = 12e^{12x+5}$ et $v(x) = x^3 \implies v'(x) = 3x^2$

La formule de dérivation d'un quotient est $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{12e^{12x+5} \times x^3 - e^{12x+5} \times 3x^2}{(x^3)^2} \\ &= \frac{x^2 e^{12x+5} (12x - 3)}{x^6} \end{aligned}$$

En simplifiant par x^2 (on peut le faire car $x \neq 0$), on obtient :

$$f'(x) = \frac{(12x - 3)e^{12x+5}}{x^4}, \text{ ce qui est bien l'expression demandée.}$$

b) Pour étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^*$, on étudie le signe de chaque facteur.

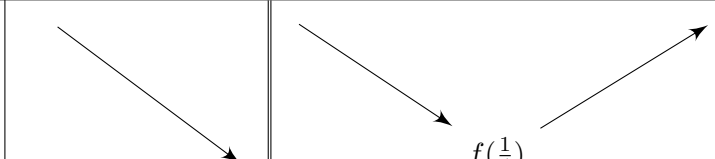
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $e^{12x+5} > 0$ (propriété de l'exponentielle).
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $x^4 > 0$ car $x \neq 0$ et la puissance est paire.
- Le signe de $f'(x)$ ne dépend donc que du signe de $12x - 3$.

$$\text{On résout } 12x - 3 = 0 \iff 12x = 3 \iff x = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

L'expression $12x - 3$ est négative pour $x < 1/4$ et positive pour $x > 1/4$.

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$12x - 3$	—	—	0	+
$f'(x)$	—	—	0	+

c) Le signe de la dérivée nous donne les variations de la fonction :

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$	—	—	0	+
$f(x)$				

La fonction admet un minimum local en $x = \frac{1}{4}$. Sa valeur exacte est : $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{e^{12(\frac{1}{4})+5}}{(\frac{1}{4})^3} = \frac{e^{3+5}}{\frac{1}{64}}$
 $= \frac{e^8}{\frac{1}{64}}$
 $= 64e^8$

Le minimum local est $\boxed{64e^8}$.

d) L'équation de la tangente au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Ici, $a = -1$.

$$f(-1) = \frac{e^{12(-1)+5}}{(-1)^3} = \frac{e^{-7}}{-1} = -e^{-7}.$$

$$f'(-1) = \frac{(12(-1) - 3)e^{12(-1)+5}}{(-1)^4} = \frac{-15e^{-7}}{1} = -15e^{-7}.$$

$$\begin{aligned} \text{On remplace dans la formule : } y &= -15e^{-7}(x - (-1)) + (-e^{-7}) \\ &= -15e^{-7}(x + 1) - e^{-7} \\ &= -15e^{-7}x - 15e^{-7} - e^{-7} \\ &= -15e^{-7}x - 16e^{-7} \end{aligned}$$

L'équation de la tangente est $\boxed{y = -15e^{-7}x - 16e^{-7}}$.