Correction Exercice 1 (3 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4x+7}{x^2+2}$.

a. **Étude du sens de variation de f sur $[-5\,;\,1]$.**

Pour étudier les variations de f, nous devons calculer sa dérivée $f'(x)$. f est de la forme $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec :

- $u(x) = 4x + 7$, donc $u'(x) = 4$
- $v(x) = x^2 + 2$, donc $v'(x) = 2x$

On utilise la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{4(x^2+2) - (4x+7)(2x)}{(x^2+2)^2} \\
&= \frac{4x^2 + 8 - (8x^2 + 14x)}{(x^2+2)^2} \\
&= \frac{4x^2 + 8 - 8x^2 - 14x}{(x^2+2)^2} \\
&= \frac{-4x^2 - 14x + 8}{(x^2+2)^2}
\end{aligned}$$

Le dénominateur $(x^2+2)^2$ est un carré, donc il est toujours strictement positif. Le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de son numérateur, le polynôme $N(x) = -4x^2 - 14x + 8$.

Cherchons les racines de $N(x)$ avec le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$: $\Delta = (-14)^2 - 4(-4)(8) = 196 + 128 = 324 = 18^2$.

Les racines sont : $x_1 = \dfrac{-(-14) - 18}{2(-4)} = \dfrac{14 - 18}{-8} = \dfrac{-4}{-8} = \dfrac{1}{2}$

$x_2 = \dfrac{-(-14) + 18}{2(-4)} = \dfrac{32}{-8} = -4$

Le polynôme $N(x)$ est du signe de $a = -4$ (négatif) à l'extérieur de ses racines.

On dresse le tableau de variations sur l'intervalle $[-5\,;\,1]$:

x	-5		-4		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(-5)$	$\searrow$	$f(-4)$	$\nearrow$	$f(\frac{1}{2})$	$\searrow$	$f(1)$

Calcul des valeurs aux bornes et aux extrema :

- $f(-5) = \dfrac{4(-5)+7}{(-5)^2+2} = \dfrac{-20+7}{25+2} = \dfrac{-13}{27} \approx -0,48$
- $f(-4) = \dfrac{4(-4)+7}{(-4)^2+2} = \dfrac{-16+7}{16+2} = \dfrac{-9}{18} = -\dfrac{1}{2} = -0,5$
- $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{4(\frac{1}{2})+7}{(\frac{1}{2})^2+2} = \dfrac{2+7}{\frac{1}{4}+2} = \dfrac{9}{\frac{9}{4}} = 9 \times \dfrac{4}{9} = 4$
- $f(1) = \dfrac{4(1)+7}{1^2+2} = \dfrac{11}{3} \approx 3,67$

b. **Minimum de f sur $[-5\,;\,1]$**

D'après le tableau de variations, le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[-5\,;\,1]$ est $\boxed{-\dfrac{1}{2}}$, atteint pour $\boxed{x=-4}$.

c. **Maximum de f sur $[-5\,;\,1]$**

D'après le tableau de variations, le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[-5\,;\,1]$ est $\boxed{4}$, atteint pour $\boxed{x=\dfrac{1}{2}}$.

Correction Exercice 2 (1,5 points)

1. Le signe de la fonction dérivée f' nous donne les variations de la fonction f. D'après le graphique de f', qui est une parabole, on lit son signe :

   - $f'(x) \geq 0$ (courbe au-dessus de l'axe) pour $x \in]-\infty, 2] \cup [4, +\infty[$.
   - $f'(x) \leq 0$ (courbe en dessous de l'axe) pour $x \in [2, 4]$.

   Par conséquent, la fonction f doit être croissante, puis décroissante, puis croissante, avec un maximum local en $x = 2$ et un minimum local en $x = 4$. Les courbes qui correspondent à ces variations sont les **courbes B et F**.

2. Les variations de la fonction g nous donnent le signe de sa dérivée g'. D'après le graphique de g, on observe ses variations :

   - g est décroissante sur $]-\infty, -2]$, donc $g'(x) \geq 0$ sur cet intervalle.
   - g est croissante sur $[-2, 1]$, donc $g'(x) \leq 0$ sur cet intervalle.
   - g est décroissante sur $[1, +\infty[$, donc $g'(x) \geq 0$ sur cet intervalle.

   La dérivée g' s'annule donc en $x = -2$ et $x = 1$. Elle doit être positive entre ces racines et négative à l'extérieur. Il s'agit donc d'une parabole tournée vers le bas. La seule courbe qui correspond à ces propriétés est la **courbe A**.

Correction Exercice 3 (3,5 points)

1. **FAUX.** L'équation $f'(x) = 0$ correspond aux points où la tangente à la courbe est horizontale. On observe sur le graphique que cela se produit pour trois valeurs de x : en $x = -4$, $x = -2$ et $x = 1$. Il y a donc 3 solutions.

2. **FAUX.** $f'(-3,5)$ est le coefficient directeur de la tangente en $x = -3,5$. À cet endroit, la fonction f est croissante, donc $f'(-3,5) > 0$. $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente en $x = -1$. À cet endroit, la fonction f est décroissante, donc $f'(-1) < 0$. Un nombre positif est toujours supérieur à un nombre négatif. La correction est donc $f'(-3,5) > f'(-1)$.

3. **VRAI.** La fonction f admet un extremum local si sa dérivée f' s'annule en changeant de signe. En $x = -4$, f' passe de positive à négative (maximum local). En $x = -2$, f' passe de négative à positive (minimum local). En $x = 1$, f' s'annule mais ne change pas de signe (elle est négative avant et après), ce n'est donc pas un extremum. Il y a bien 2 extremums locaux.

4. **FAUX.** L'inéquation $f'(x) \geq 0$ a pour solution l'ensemble des abscisses où la fonction f est croissante ou a une tangente horizontale. D'après le graphique, f est croissante sur l'intervalle $[-4\,;\,-2]$ et sur $[1\,;\,3]$. L'ensemble des solutions est donc $[-4\,;\,-2] \cup [1\,;\,3]$.

Correction Exercice 4 (5 points)

a- $h(x) = (2x^3 - 2x^2 - 5x)(x^2 - 1)$. On applique la formule du produit $(uv)' = u'v + uv'$. $u(x) = 2x^3 - 2x^2 - 5x \implies u'(x) = 6x^2 - 4x - 5$. $v(x) = x^2 - 1 \implies v'(x) = 2x$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= (6x^2 - 4x - 5)(x^2 - 1) + (2x^3 - 2x^2 - 5x)(2x) \\ &= (6x^4 - 6x^2 - 4x^3 + 4x - 5x^2 + 5) + (4x^4 - 4x^3 - 10x^2) \\ &= 6x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 4x + 5 + 4x^4 - 4x^3 - 10x^2 \\ h'(x) &= \boxed{10x^4 - 8x^3 - 21x^2 + 4x + 5} \end{aligned}$$

b- $i(x) = \dfrac{4x^3 - 3x - 1}{2x - 1}$. On applique la formule du quotient $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. $u(x) = 4x^3 - 3x - 1 \implies u'(x) = 12x^2 - 3$. $v(x) = 2x - 1 \implies v'(x) = 2$.

$$\begin{aligned} i'(x) &= \frac{(12x^2 - 3)(2x - 1) - (4x^3 - 3x - 1)(2)}{(2x - 1)^2} \\ &= \frac{(24x^3 - 12x^2 - 6x + 3) - (8x^3 - 6x - 2)}{(2x - 1)^2} \\ &= \frac{24x^3 - 12x^2 - 6x + 3 - 8x^3 + 6x + 2}{(2x - 1)^2} \\ i'(x) &= \boxed{\frac{16x^3 - 12x^2 + 5}{(2x - 1)^2}} \end{aligned}$$

c- $j(x) = \dfrac{1}{2x^2+1}$. On applique la formule de l'inverse $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$. $v(x) = 2x^2+1 \implies v'(x) = 4x$. $j'(x) = \boxed{-\dfrac{4x}{(2x^2+1)^2}}$

d- $f(x) = x^4\sqrt{x}$. On simplifie d'abord l'écriture. $f(x) = x^4 \times x^{1/2} = x^{4+1/2} = x^{9/2}$. On utilise la formule $(x^n)' = nx^{n-1}$. $f'(x) = \dfrac{9}{2}x^{\frac{9}{2}-1} = \dfrac{9}{2}x^{7/2}$. On peut réécrire $x^{7/2} = x^{3.5} = x^3 \times x^{0.5} = x^3\sqrt{x}$. $f'(x) = \boxed{\dfrac{9}{2}x^3\sqrt{x}}$

Correction Exercice 5 (5 points)

$f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 15$ sur $[-2\,;\,3]$.

1. $f'(x) = -2(3x^2) + 3(2x) + 12 = \boxed{-6x^2 + 6x + 12}$.

2. L'équation de la tangente T en $x = 1$ est $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.
   - $f(1) = -2(1)^3 + 3(1)^2 + 12(1) + 15 = -2 + 3 + 12 + 15 = 28$.
   - $f'(1) = -6(1)^2 + 6(1) + 12 = -6 + 6 + 12 = 12$.

   L'équation est donc $y = 12(x-1) + 28 \iff y = 12x - 12 + 28$. $\boxed{T : y = 12x + 16}$.

3. On a $g(x) = f(x) - (12x+16) = (-2x^3 + 3x^2 + 12x + 15) - (12x+16) = -2x^3 + 3x^2 - 1$. Pour étudier les variations de g, on calcule sa dérivée : $g'(x) = -6x^2 + 6x = 6x(-x+1)$. $g'(x)$ est un polynôme du second degré s'annulant en $x = 0$ et $x = 1$. Il est du signe de $a = -6$ (négatif) à l'extérieur des racines.

x	-2		0		1		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	27	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-28

4. a. $g(-0,5) = -2(-0,5)^3 + 3(-0,5)^2 - 1 = -2(-0,125) + 3(0,25) - 1 = 0,25 + 0,75 - 1 = \boxed{0}$.

   b. Pour le signe de g, on calcule les valeurs du tableau de variation : $g(-2) = -2(-8) + 3(4) - 1 = 16 + 12 - 1 = 27$. $g(0) = -1$. $g(1) = -2 + 3 - 1 = 0$. $g(3) = -2(27) + 3(9) - 1 = -54 + 27 - 1 = -28$. On sait que g s'annule en $-0,5$ et en 1. Le tableau de signe de $g(x)$ est donc :

x	-2		-0.5		1		3
Signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

$g(x) \geq 0$ pour $x \in [-2\,;\,-0,5]$ et $g(x) \leq 0$ pour $x \in [-0,5\,;\,3]$.

c. La position de $\mathcal{C}$ par rapport à T est donnée par le signe de $g(x) = f(x) - y_T$.

- Sur $[-2\,;\,-0,5]$, $g(x) \geq 0$, donc $\mathcal{C}$ **est au-dessus de** T.
- Sur $[-0,5\,;\,3]$, $g(x) \leq 0$, donc $\mathcal{C}$ **est en dessous de** T.
- Elles se coupent aux points d'abscisses $-0,5$ et 1.

Correction Exercice 6 (2 points)

Soit $f(x) = x^3 - ax^2 + b$. Les informations données se traduisent par deux équations :

1. Un minimum local est atteint pour $x = 2$ signifie que la dérivée s'annule en $x = 2$: $f'(2) = 0$.

2. Ce minimum local est égal à 5 signifie que l'image de 2 par f est 5 : $f(2) = 5$.

Calculons la dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 2ax$.

Utilisons la première condition : $f'(2) = 0 \iff 3(2)^2 - 2a(2) = 0 \iff 12 - 4a = 0 \iff 4a = 12 \iff \boxed{a = 3}$.

La fonction est donc de la forme $f(x) = x^3 - 3x^2 + b$.

Utilisons la seconde condition : $f(2) = 5 \iff (2)^3 - 3(2)^2 + b = 5 \iff 8 - 3(4) + b = 5 \iff 8 - 12 + b = 5 \iff -4 + b = 5 \iff \boxed{b = 9}$.

La fonction recherchée est $\boxed{f(x) = x^3 - 3x^2 + 9}$.