

Correction de l'exercice 1

1. La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = -2$ et de premier terme $u_1 = 0,5$.

a. La forme récurrente est donnée par la relation $u_{n+1} = u_n + r$. Donc $u_{n+1} = u_n - 2$.

b. Le premier terme est u_1 . La formule explicite est $u_n = u_1 + (n-1)r$. $u_n = 0,5 + (n-1) \times (-2) = 0,5 - 2n + 2 = 2,5 - 2n$. Donc $u_n = 2,5 - 2n$.

c. On calcule u_{13} avec la formule précédente : $u_{13} = 2,5 - 2 \times 13 = 2,5 - 26 = -23,5$.
 $u_{13} = -23,5$.

d. La raison $r = -2$ est strictement négative. Par conséquent, la suite (u_n) est **strictement décroissante**.

e. On veut calculer la somme des 11 premiers termes, qui sont $u_1, u_2, \dots, u_{11}$. Il y a 11 termes.
 $S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} = 11 \times \frac{u_1 + u_{11}}{2}$.
On calcule $u_{11} = 2,5 - 2 \times 11 = 2,5 - 22 = -19,5$.
 $S = 11 \times \frac{0,5 + (-19,5)}{2} = 11 \times \frac{-19}{2} = 11 \times (-9,5) = -104,5$.
La somme est $-104,5$.

2. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -1$.

a. La forme récurrente est $v_{n+1} = q \times v_n$. Donc $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$.

b. La formule explicite est $v_n = v_0 \times q^n$. Donc $v_n = -1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c. On calcule $v_{20} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{20} = -\frac{1}{2^{20}} = -\frac{1}{1\,048\,576}$. $v_{20} \approx -9,54 \times 10^{-7}$.

d. On a $v_0 = -1 < 0$ et la raison $q = \frac{1}{2}$ est comprise dans l'intervalle $]0; 1[$. Une suite géométrique avec un premier terme négatif et une raison dans $]0; 1[$ est **strictement croissante**.

e. On veut la somme des 11 premiers termes, de v_0 à v_{10} . Il y a $10 - 0 + 1 = 11$ termes.
 $S' = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q} = v_0 \times \frac{1 - q^{11}}{1 - q}$.
 $S' = -1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1 - \frac{1}{2}} = -1 \times \frac{1 - \frac{1}{2048}}{\frac{1}{2}} = -2 \times \left(\frac{2048 - 1}{2048}\right) = -2 \times \frac{2047}{2048} = -\frac{2047}{1024}$.
La somme est $-\frac{2047}{1024} \approx -1,999$.

Correction de l'exercice 2

1. La masse initiale est de 1 kg, soit 1000 g. Donc $u_0 = 1000$. Chaque jour, la masse augmente de 20 %, ce qui revient à la multiplier par $1 + \frac{20}{100} = 1,2$. Ensuite, on perd 100 g.

Pour passer de la masse du jour n (u_n) à celle du jour $n + 1$ (u_{n+1}), on effectue donc ces deux opérations : $u_{n+1} = u_n \times 1,2 - 100$. On retrouve bien la formule $u_{n+1} = 1,2u_n - 100$, avec un premier terme $u_0 = 1000$ g.

2. On pose $v_n = u_n - 500$.

- a. Pour montrer que (v_n) est une suite géométrique, on exprime v_{n+1} en fonction de v_n .

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 500 \\ &= (1,2u_n - 100) - 500 \\ &= 1,2u_n - 600 \end{aligned}$$

On factorise par 1,2 pour faire apparaître $u_n - 500$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 1,2 \left(u_n - \frac{600}{1,2} \right) \\ &= 1,2(u_n - 500) \\ &= 1,2v_n \end{aligned}$$

Ceci prouve que **la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,2$** .

- b. On calcule d'abord le premier terme de (v_n) : $v_0 = u_0 - 500 = 1000 - 500 = 500$. La formule explicite de v_n est $v_n = v_0 \times q^n$, donc $v_n = 500 \times 1,2^n$.

Comme $v_n = u_n - 500$, on a $u_n = v_n + 500$. On en déduit l'expression de u_n : $u_n = 500 \times 1,2^n + 500$.

- c. L'objectif est de 30 kg, soit 30 000 g. On cherche le plus petit entier n tel que $u_n > 30\,000$.

$$\begin{aligned} 500 \times 1,2^n + 500 &> 30\,000 \\ 500 \times 1,2^n &> 29\,500 \\ 1,2^n &> \frac{29\,500}{500} \\ 1,2^n &> 59 \end{aligned}$$

On utilise la calculatrice pour trouver n (par tâtonnement ou avec le mode table).

- $1,2^{22} \approx 55,04$ (insuffisant)
- $1,2^{23} \approx 66,05$ (suffisant)

Il faudra donc attendre **23 jours** pour que la masse de bactéries dépasse 30 kg.

- d. On étudie la limite de $u_n = 500 \times 1,2^n + 500$ quand n tend vers $+\infty$. La raison de la suite

géométrique est $q = 1,2$. Comme $q > 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,2^n = +\infty$. Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. La masse de bactéries tend à **croître sans limite**.

Correction de l'exercice 3

1. a. Le premier jour, la distance est $d_1 = 50$ km. Chaque jour, la performance diminue de 1%, ce qui revient à multiplier la distance de la veille par $1 - \frac{1}{100} = 0,99$. $d_2 = d_1 \times 0,99 = 50 \times 0,99 = 49,5$ km. $d_3 = d_2 \times 0,99 = 49,5 \times 0,99 = 49,005$ km. $d_1 = 50$, $d_2 = 49,5$, $d_3 = 49,005$.
 - b. Pour passer du jour n au jour $n + 1$, on multiplie la distance par 0,99. La relation de récurrence est donc $d_{n+1} = 0,99 \times d_n$.
 - c. Cette relation montre que **la suite (d_n) est géométrique**. Son premier terme est $d_1 = 50$ et sa raison est $q = 0,99$. L'expression explicite est $d_n = d_1 \times q^{n-1}$. Donc $d_n = 50 \times 0,99^{n-1}$.
2. La distance totale L_n est la somme des distances parcourues chaque jour : $L_n = d_1 + d_2 + \dots + d_n$. C'est la somme des n premiers termes de la suite géométrique (d_n) .

$$\begin{aligned} L_n &= d_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} \\ L_n &= 50 \times \frac{1 - 0,99^n}{1 - 0,99} \\ L_n &= 50 \times \frac{1 - 0,99^n}{0,01} \\ L_n &= 5000 \times (1 - 0,99^n) \end{aligned}$$

La distance totale parcourue au bout de n jours est $L_n = 5000(1 - 0,99^n)$.

3. On étudie l'expression $L_n = 5000(1 - 0,99^n)$. Pour tout entier $n \geq 1$, on a $0,99^n > 0$. Donc $1 - 0,99^n < 1$. En multipliant par 5000 (qui est positif), on obtient : $5000(1 - 0,99^n) < 5000$. Cela signifie que $L_n < 5000$ **pour tout** n .

Conclusion sur le pari : Le globetrotter n'atteindra **jamais** les 5000 km. La distance totale qu'il parcourt s'en approchera infiniment, mais sans jamais l'atteindre. Il va donc **perdre son pari**.

4. On cherche le nombre minimal de jours N pour parcourir 4999 km. On résout $L_N \geq 4999$.

$$5000(1 - 0,99^N) \geq 4999$$

$$1 - 0,99^N \geq \frac{4999}{5000}$$

$$1 - 0,99^N \geq 0,9998$$

$$-0,99^N \geq 0,9998 - 1$$

$$-0,99^N \geq -0,0002$$

$$0,99^N \leq 0,0002 \quad (\text{On multiplie par } -1, \text{ on change le sens})$$

On utilise la calculatrice pour trouver N .

- Essayons $N=800$: $0,99^{800} \approx 0,00032 > 0,0002$ (insuffisant)
- Essayons $N=850$: $0,99^{850} \approx 0,00019 < 0,0002$ (suffisant)

On affine :

- $0,99^{848} \approx 0,000204$
- $0,99^{849} \approx 0,000201$
- $0,99^{850} \approx 0,000199$

Le plus petit entier N est **850**. Il lui faudrait **850 jours** pour parcourir 4999 km.