Correction de l'exercice n°1

L'énoncé indique que le quota de pêche était de 500 tonnes en 2018 et qu'il diminue de 30 tonnes chaque année. L'année de référence est 2019, qui correspond donc à $n = 0$. Le quota en 2019 est donc $u_0 = 500 - 30 = 470$ tonnes. La suite (u_n) modélise le quota pour l'année $2019 + n$.

1) L'année 2021 correspond à $n = 2$. Le quota en 2020 ($n = 1$) est $u_1 = u_0 - 30 = 470 - 30 = 440$ tonnes. Le quota en 2021 ($n = 2$) est $u_2 = u_1 - 30 = 440 - 30 = 410$ tonnes. Le quota pour 2021 est donc de $\boxed{410 \text{ tonnes}}$.

2) Pour passer d'une année à la suivante, on soustrait 30 tonnes au quota. On a donc la relation $u_{n+1} = u_n - 30$. C'est la définition d'une **suite arithmétique**. Ses éléments caractéristiques sont :
   - son premier terme $\boxed{u_0 = 470}$.
   - sa raison $\boxed{r = -30}$.

3) La formule explicite d'une suite arithmétique est $u_n = u_0 + n \times r$. On a donc : $\boxed{u_n = 470 - 30n}$.

4) Pour calculer u_{10}, on remplace n par 10 dans la formule : $u_{10} = 470 - 30 \times 10 = 470 - 300 = 170$. $\boxed{u_{10} = 170}$. Ce nombre représente le quota de pêche autorisé en tonnes pour l'année $2019 + 10$, c'est-à-dire **en 2029**.

5) On cherche l'année pour laquelle le quota sera inférieur à 200 tonnes. Cela revient à résoudre l'inéquation $u_n < 200$.

$$\begin{aligned} u_n < 200 &\Leftrightarrow 470 - 30n < 200 \\ &\Leftrightarrow -30n < 200 - 470 \\ &\Leftrightarrow -30n < -270 \\ &\Leftrightarrow 30n > 270 \quad \text{(Attention, on change le sens de l'inégalité)} \\ &\Leftrightarrow n > \frac{270}{30} \\ &\Leftrightarrow n > 9 \end{aligned}$$

   L'entier n doit être strictement supérieur à 9. Le premier entier qui convient est donc $n = 10$. L'année correspondante est $2019 + 10 = 2029$. C'est **à partir de l'année 2029** que le quota sera inférieur à 200 tonnes.

Correction de l'exercice n°2

1) Le débit d_n augmente de 3 % chaque jour. Augmenter une valeur de 3 % revient à la multiplier par $1 + \frac{3}{100} = 1,03$. Pour passer du débit du jour n au débit du jour $n + 1$, on multiplie donc par 1,03. La relation est : $\boxed{d_{n+1} = 1,03 \times d_n}$.

C'est la définition d'une **suite géométrique** de raison $\boxed{q = 1,03}$ et de premier terme $\boxed{d_1 = 300}$.

2) Le mois de mars contient 31 jours. On doit calculer le volume total, c'est-à-dire la somme des débits journaliers du 1er au 31 mars : $V = d_1 + d_2 + \cdots + d_{31}$.

   On utilise la formule de la somme des termes d'une suite géométrique : $S =$ premier terme $\times \dfrac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$.

   - Premier terme : $d_1 = 300$
   - Raison : $q = 1,03$
   - Nombre de termes : 31

$$\begin{aligned}
V &= 300 \times \frac{1 - 1,03^{31}}{1 - 1,03} \\
V &= 300 \times \frac{1 - 1,03^{31}}{-0,03} \\
V &\approx 300 \times \frac{1 - 2,50009}{-0,03} \\
V &\approx 300 \times \frac{-1,50009}{-0,03} \\
V &\approx 15000,9
\end{aligned}$$

   Le volume total d'eau apporté est d'environ $\boxed{15\,000,9 \text{ m}^3}$. *Note : un calcul plus précis donne 15000,94...*

Correction de l'exercice n°3

1) On a $u_4 = 12$ et $u_{10} = -10$. La formule reliant deux termes d'une suite arithmétique est $u_p = u_k + (p - k)r$.

$$\begin{aligned}
u_{10} = u_4 + (10 - 4)r &\Leftrightarrow -10 = 12 + 6r \\
&\Leftrightarrow -22 = 6r \\
&\Leftrightarrow r = \frac{-22}{6} = -\frac{11}{3}
\end{aligned}$$

   La raison est $\boxed{r = -\dfrac{11}{3}}$.

   Pour calculer u_{13}, on peut partir de u_{10} : $u_{13} = u_{10} + (13 - 10)r = -10 + 3 \times \left(-\dfrac{11}{3}\right) = -10 - 11 = -21$. Donc $\boxed{u_{13} = -21}$.

2) On a $v_3 = 6$, $v_5 = 1,5$ et la raison q est négative. La formule est $v_p = v_k \times q^{p-k}$.

$$\begin{aligned} v_5 = v_3 \times q^{5-3} &\Leftrightarrow 1,5 = 6 \times q^2 \\ &\Leftrightarrow q^2 = \frac{1,5}{6} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Les solutions sont $q = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ ou $q = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$. Comme la raison est négative, on choisit $\boxed{q = -\dfrac{1}{2}}$.

(L'énoncé demande u_0, il s'agit d'une coquille, on calcule v_0.) $v_3 = v_0 \times q^3 \Leftrightarrow 6 = v_0 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow 6 = v_0 \times \left(-\dfrac{1}{8}\right) \Leftrightarrow v_0 = 6 \times (-8) = -48$. Le premier terme est $\boxed{v_0 = -48}$.

3) On veut calculer $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$ avec $u_n = n + 2^n + 1$. On peut décomposer la somme : $S = \sum_{k=0}^{10}(k + 2^k + 1) = \sum_{k=0}^{10}(k+1) + \sum_{k=0}^{10} 2^k$.

Première somme A : $A = \sum_{k=0}^{10}(k+1) = (0+1) + (1+1) + \cdots + (10+1) = 1 + 2 + \cdots + 11$. C'est la somme d'une suite arithmétique de premier terme 1, de raison 1, et avec 11 termes. $A = 11 \times \dfrac{1+11}{2} = 11 \times 6 = 66$.

Deuxième somme B : $B = \sum_{k=0}^{10} 2^k = 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{10}$. C'est la somme d'une suite géométrique de premier terme 1, de raison 2, et avec 11 termes. $B = 1 \times \dfrac{1-2^{11}}{1-2} = \dfrac{1-2048}{-1} = 2047$.

Finalement, $S = A + B = 66 + 2047 = 2113$. Donc $\boxed{S = 2113}$.

Correction de l'exercice n°4

On a $C_0 = 8\,000$.

a) Pour obtenir le capital de l'année $n+1$, on applique au capital de l'année n une augmentation de 3,8 % (multiplication par $1,038$), puis on prélève 76€. La relation de récurrence est donc : $\boxed{C_{n+1} = 1,038 \times C_n - 76}$.

b) On pose $D_n = C_n - 2000$. Exprimons D_{n+1} en fonction de D_n.

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= C_{n+1} - 2000 && \text{(définition de la suite } D_n) \\ &= (1,038 \times C_n - 76) - 2000 && \text{(on remplace } C_{n+1}) \\ &= 1,038 \times C_n - 2076 \end{aligned}$$

Comme $D_n = C_n - 2000$, on a $C_n = D_n + 2000$. On substitue :

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= 1,038 \times (D_n + 2000) - 2076 \\ &= 1,038 \times D_n + 1,038 \times 2000 - 2076 \\ &= 1,038 \times D_n + 2076 - 2076 \\ &= 1,038 \times D_n \end{aligned}$$

La relation $D_{n+1} = 1,038 \times D_n$ prouve que **la suite** (D_n) **est géométrique de raison** $q = 1,038$.

c) Pour trouver l'expression de D_n, il nous faut son premier terme D_0. $D_0 = C_0 - 2000 = 8000 - 2000 = 6000$. La formule explicite est $D_n = D_0 \times q^n$. Donc $\boxed{D_n = 6000 \times 1,038^n}$.

d) On a $C_n = D_n + 2000$. En remplaçant D_n par son expression, on obtient : $\boxed{C_n = 6000 \times 1,038^n + 2000}$.

e) Au bout de 10 ans, on calcule C_{10} : $C_{10} = 6000 \times 1,038^{10} + 2000 \approx 8706,554...$ Au bout de 10 ans, elle possédera environ $\boxed{8706,55}$.

f) Combien d'années sont nécessaires pour que son capital augmente de 50 % ?

Le capital initial est de $8\,000$. Une augmentation de 50 % correspond à un capital cible de $8\,000 \times 1,5 = 12\,000$. On cherche donc le plus petit entier n tel que $C_n \geq 12\,000$.

On part de l'inéquation :

$$\begin{aligned} 6000 \times 1,038^n + 2000 &\geq 12000 \\ 6000 \times 1,038^n &\geq 10000 \\ 1,038^n &\geq \frac{10000}{6000} \\ 1,038^n &\geq \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Comme $\frac{5}{3} \approx 1,667$, on cherche le plus petit entier n tel que $1,038^n \geq 1,667$.

À ce niveau, on ne dispose pas d'outil algébrique pour isoler n. On utilise donc la calculatrice par essais successifs ou avec la fonction tableur.

Méthode avec le mode Table de la calculatrice

On définit la fonction $f(x) = 1,038^x$ (ou la suite $u_n = 1,038^n$) et on observe le tableau de valeurs. On cherche la première valeur de x pour laquelle $f(x)$ est supérieure à $5/3 \approx 1,667$.

n	$1,038^n$
...	...
13	$\approx 1,62$
14	$\approx \mathbf{1,68}$
...	...

La table confirme que la condition est remplie pour la première fois lorsque $n = 14$.

Il faudra donc **14 années** pour que son capital augmente de 50 %. $\boxed{n = 14}$.

Correction de l'exercice n°5

On a une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 2$. La somme $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ est la somme de $n+1$ termes. La formule est $S_n = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$.
Exprimons d'abord u_n en fonction de n : $u_n = u_0 + n \times r = 5 + 2n$. On remplace u_n dans la formule de la somme :

$$S_n = (n+1) \times \frac{5 + (5 + 2n)}{2}$$
$$S_n = (n+1) \times \frac{10 + 2n}{2}$$
$$S_n = (n+1) \times (5 + n)$$
$$S_n = n^2 + 5n + n + 5 = n^2 + 6n + 5$$

On cherche n tel que $S_n = 10\,605$. On doit donc résoudre l'équation du second degré :

$$n^2 + 6n + 5 = 10605$$
$$n^2 + 6n - 10600 = 0$$

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$: $\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times (-10600) = 36 + 42400 = 42436$. Le discriminant est positif, il y a deux racines réelles. $\sqrt{\Delta} = \sqrt{42436} = 206$. Les solutions sont : $n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - 206}{2} = \frac{-212}{2} = -106$. $n_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + 206}{2} = \frac{200}{2} = 100$.
Comme n est un entier naturel (un nombre d'années, non-nul d'après l'énoncé), la solution $n_1 = -106$ est rejetée. La seule solution possible est $n = 100$. La valeur de l'entier n est $\boxed{100}$.