

Correction de l'exercice n°1

1. La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de terme $u_7 = 12$.

Pour calculer u_{20} , on utilise la formule explicite d'une suite arithmétique reliant u_n et u_p :

$$u_n = u_p + (n - p) \times r.$$

Avec $n = 20$ et $p = 7$, on a :

$$u_{20} = u_7 + (20 - 7) \times r$$

$$u_{20} = 12 + 13 \times 3$$

$$u_{20} = 12 + 39$$

$$u_{20} = 51$$

Le terme u_{20} est donc 51.

2. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + 7$.

Cette relation de récurrence est de la forme $u_{n+1} = u_n + r$. On reconnaît donc une suite arithmétique de raison $r = 7$ et de premier terme $u_0 = 3$.

Pour calculer u_{20} , on utilise la formule du terme général en fonction de u_0 : $u_n = u_0 + n \times r$.

Pour $n = 20$:

$$u_{20} = u_0 + 20 \times r$$

$$u_{20} = 3 + 20 \times 7$$

$$u_{20} = 3 + 140$$

$$u_{20} = 143$$

Le terme u_{20} est donc 143.

Correction de l'exercice n°2

1. On veut calculer $S = 10 + 13 + 16 + \dots + 163$.

Les termes de cette somme forment une suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 10$ et de raison $r = 13 - 10 = 3$.

La formule de la somme des termes est : $S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$.

Il faut d'abord déterminer le nombre de termes. Pour cela, on cherche l'indice n du dernier terme, 163 :

$$\begin{aligned}
 u_n = 163 &\Leftrightarrow u_0 + n \times r = 163 \\
 &\Leftrightarrow 10 + 3n = 163 \\
 &\Leftrightarrow 3n = 153 \\
 &\Leftrightarrow n = \frac{153}{3} = 51
 \end{aligned}$$

Le dernier terme est u_{51} . Comme la somme commence à u_0 , il y a $51 - 0 + 1 = 52$ termes.

On peut maintenant calculer la somme :

$$\begin{aligned}
 S &= 52 \times \frac{10 + 163}{2} \\
 S &= 52 \times \frac{173}{2} \\
 S &= 26 \times 173 \\
 S &= 4498
 \end{aligned}$$

La somme S est égale à 4498.

2. On veut calculer la somme W des 100 premiers nombres pairs. On considère les nombres pairs non nuls.

Il s'agit de la somme $W = 2 + 4 + 6 + \dots$

Les nombres pairs forment une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 2$ et de raison $r = 2$.

Le 100^{ème} nombre pair est $u_{100} = 2 \times 100 = 200$.

Il y a 100 termes dans cette somme.

$$\begin{aligned}
 W &= 100 \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} \\
 W &= 100 \times \frac{2 + 200}{2} \\
 W &= 100 \times \frac{202}{2} \\
 W &= 100 \times 101 \\
 W &= 10100
 \end{aligned}$$

La somme W des 100 premiers nombres pairs est 10100.

Correction de l'exercice n°3

1. On sait que $v_3 = 6$ et $v_8 = 1\,458$.

La formule reliant deux termes d'une suite géométrique est $v_n = v_p \times q^{n-p}$. Avec $n = 8$ et $p = 3$:

$$\begin{aligned} v_8 &= v_3 \times q^{8-3} \Leftrightarrow 1\,458 = 6 \times q^5 \\ &\Leftrightarrow q^5 = \frac{1\,458}{6} \\ &\Leftrightarrow q^5 = 243 \end{aligned}$$

Comme $3^5 = 243$, on en déduit que la raison est $\boxed{q = 3}$.

Pour trouver le premier terme v_0 , on utilise v_3 :

$$\begin{aligned} v_3 &= v_0 \times q^3 \Leftrightarrow 6 = v_0 \times 3^3 \\ &\Leftrightarrow 6 = v_0 \times 27 \\ &\Leftrightarrow v_0 = \frac{6}{27} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

Le premier terme est $\boxed{v_0 = \frac{2}{9}}$.

L'expression du terme général est $v_n = v_0 \times q^n$, donc $\boxed{v_n = \frac{2}{9} \times 3^n}$. On peut aussi l'écrire $v_n = 2 \times 3^{-2} \times 3^n = 2 \times 3^{n-2}$.

2. On sait que $v_{21} = 65\,536$ et $v_{23} = 262\,144$.

On applique la même méthode :

$$\begin{aligned} v_{23} &= v_{21} \times q^{23-21} \Leftrightarrow 262\,144 = 65\,536 \times q^2 \\ &\Leftrightarrow q^2 = \frac{262\,144}{65\,536} \\ &\Leftrightarrow q^2 = 4 \end{aligned}$$

Il y a deux solutions possibles pour la raison : $q = 2$ ou $q = -2$. L'énoncé ne permettant pas de trancher, nous devons étudier les deux cas.

Cas 1 : $q = 2$

$$\begin{aligned} v_{21} &= v_0 \times q^{21} \Leftrightarrow 65\,536 = v_0 \times 2^{21} \\ &\Leftrightarrow v_0 = \frac{65\,536}{2^{21}} \end{aligned}$$

Sachant que $65\,536 = 2^{16}$, on a $v_0 = \frac{2^{16}}{2^{21}} = 2^{16-21} = 2^{-5} = \frac{1}{32}$. Dans ce cas, $\boxed{q = 2}$, $\boxed{v_0 = \frac{1}{32}}$ et

$$\boxed{v_n = \frac{1}{32} \times 2^n} \text{ (ou } v_n = 2^{n-5}\text{)}.$$

Cas 2 : $q = -2$

$$\begin{aligned} v_{21} = v_0 \times q^{21} &\Leftrightarrow 65\,536 = v_0 \times (-2)^{21} \\ &\Leftrightarrow v_0 = \frac{65\,536}{(-2)^{21}} = \frac{2^{16}}{-2^{21}} = -2^{-5} = -\frac{1}{32} \end{aligned}$$

Dans ce cas, $\boxed{q = -2}$, $\boxed{v_0 = -\frac{1}{32}}$ et $\boxed{v_n = -\frac{1}{32} \times (-2)^n}$.

Correction de l'exercice n°4

1. On veut calculer $S = 2 + 6 + 18 + 54 + \dots + 13\,122$.

Les termes de cette somme forment une suite géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $q = \frac{6}{2} = 3$.

La formule de la somme est $S = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$.

On cherche le nombre de termes. Soit $v_n = 13\,122$ le dernier terme.

$$\begin{aligned} v_n = v_0 \times q^n &\Leftrightarrow 13\,122 = 2 \times 3^n \\ &\Leftrightarrow 3^n = \frac{13\,122}{2} = 6\,561 \end{aligned}$$

À l'aide de la calculatrice, on trouve que $3^8 = 6\,561$, donc $n = 8$. La somme va de v_0 à v_8 , il y a donc $8 - 0 + 1 = 9$ termes.

On applique la formule :

$$\begin{aligned} S &= 2 \times \frac{1 - 3^9}{1 - 3} = 2 \times \frac{1 - 19\,683}{-2} \\ S &= -(1 - 19\,683) \\ S &= 19\,682 \end{aligned}$$

La somme S est égale à $\boxed{19\,682}$.

2. On veut calculer $T = 3 - 6 + 12 - 24 + \dots + 192$.

C'est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison $q = \frac{-6}{3} = -2$.

On cherche le nombre de termes. Soit $v_n = 192$ le dernier terme.

$$\begin{aligned} v_n = v_0 \times q^n &\Leftrightarrow 192 = 3 \times (-2)^n \\ &\Leftrightarrow (-2)^n = \frac{192}{3} = 64 \end{aligned}$$

Comme $2^6 = 64$, et que le résultat est positif, n doit être pair. On a donc $n = 6$. La somme va de v_0 à v_6 , il y a donc $6 - 0 + 1 = 7$ termes.

On applique la formule :

$$T = 3 \times \frac{1 - (-2)^7}{1 - (-2)} = 3 \times \frac{1 - (-128)}{1 + 2}$$

$$T = 3 \times \frac{129}{3}$$

$$T = 129$$

La somme T est égale à $\boxed{129}$.

Correction de l'exercice n°5

1. a. On part de $p_0 = 5\,000$.

Pour calculer p_1 , on enlève 20 % de la surface (ce qui revient à la multiplier par $1 - 0,20 = 0,8$) puis on ajoute les 250 m^2 semés. $p_1 = p_0 \times 0,8 + 250 = 5\,000 \times 0,8 + 250 = 4\,000 + 250 = 4\,250$. Donc $\boxed{p_1 = 4\,250\text{ m}^2}$.

On répète le processus pour p_2 à partir de p_1 : $p_2 = p_1 \times 0,8 + 250 = 4\,250 \times 0,8 + 250 = 3\,400 + 250 = 3\,650$. Donc $\boxed{p_2 = 3\,650\text{ m}^2}$.

- b. Pour passer de l'année n (surface p_n) à l'année $n+1$ (surface p_{n+1}), on effectue les mêmes opérations : on multiplie par 0,8 et on ajoute 250.

La relation de récurrence est donc : $\boxed{p_{n+1} = 0,8 \times p_n + 250}$.

2. On pose $v_n = p_n - 1\,250$.

- a. Pour justifier que (v_n) est une suite géométrique, on exprime v_{n+1} en fonction de v_n .

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= p_{n+1} - 1\,250 \quad (\text{par définition de la suite } v_n) \\ &= (0,8 \times p_n + 250) - 1\,250 \quad (\text{on remplace } p_{n+1}) \\ &= 0,8 \times p_n - 1\,000 \end{aligned}$$

On cherche à faire apparaître $v_n = p_n - 1\,250$. Pour cela, on factorise par 0,8 :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 0,8 \times \left(p_n - \frac{1\,000}{0,8}\right) \\ &= 0,8 \times (p_n - 1\,250) \\ &= 0,8 \times v_n \end{aligned}$$

On a bien une relation de la forme $v_{n+1} = q \times v_n$. La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\boxed{q = 0,8}$.

Son premier terme est : $v_0 = p_0 - 1\,250 = 5\,000 - 1\,250 = 3\,750$. Le premier terme est $v_0 = 3\,750$.

b. L'expression du terme général d'une suite géométrique est $v_n = v_0 \times q^n$. On a donc : $v_n = 3\,750 \times 0,8^n$.

c. On sait que $v_n = p_n - 1\,250$, donc $p_n = v_n + 1\,250$.

En remplaçant v_n par son expression, on obtient : $p_n = 3\,750 \times 0,8^n + 1\,250$.

d. On s'intéresse au comportement de p_n quand n devient très grand ("au bout d'un nombre important d'années").

On regarde la limite de la suite (p_n) . Le terme $0,8^n$ est le seul qui dépend de n . Comme $-1 < 0,8 < 1$, la limite de $0,8^n$ quand n tend vers $+\infty$ est 0.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0.$$

Par conséquent : $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 3\,750 \times 0 + 1\,250 = 1\,250$.

On peut donc en déduire que, sur le long terme, la surface de pelouse va se stabiliser et tendre vers **1 250 m²**.