Corrigé de l'Exercice 1

On a un triangle ABC avec $AB = 6$, $AC = 7$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 21$.

1. Pour trouver l'angle $\widehat{BAC}$, on utilise la formule trigonométrique du produit scalaire : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

$$\begin{aligned} 21 &= 6 \times 7 \times \cos(\widehat{BAC}) \\ \Leftrightarrow 21 &= 42 \times \cos(\widehat{BAC}) \\ \Leftrightarrow \cos(\widehat{BAC}) &= \frac{21}{42} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

L'angle aigu qui a un cosinus de $\frac{1}{2}$ est $60°$.

$$\boxed{\widehat{BAC} = 60°}$$

2. a) On calcule le carré de la norme de la somme vectorielle : $\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|^2 = (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \|\overrightarrow{AB}\|^2$. En utilisant les valeurs données : $\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|^2 = 7^2 - 2 \times (21) + 6^2 = 49 - 42 + 36 = 43$.

$$\boxed{\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|^2 = 43}$$

b) D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$. Donc, $\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = BC^2$. On en déduit que $BC^2 = 43$, et donc $BC = \sqrt{43}$.

$$\boxed{BC = \sqrt{43}}$$

3. a) On développe le carré scalaire : $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v}$. Comme le produit scalaire est commutatif ($\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$) et que $\vec{x} \cdot \vec{x} = \|\vec{x}\|^2$, on obtient : $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$. L'identité est vérifiée.

b) On applique cette relation. Pour $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$: on utilise $\vec{u} = \overrightarrow{CA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CB}$. $\|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}\|^2 = \|\overrightarrow{CA}\|^2 + \|\overrightarrow{CB}\|^2 - 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$. Or, $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}$. Donc, $\|\overrightarrow{BA}\|^2 = \|\overrightarrow{CA}\|^2 + \|\overrightarrow{CB}\|^2 - 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$. $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$. $6^2 = 7^2 + (\sqrt{43})^2 - 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow 36 = 49 + 43 - 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$. $36 = 92 - 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 56 \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 28$.

$$\boxed{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 28}$$

De même pour $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$: $\|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{BA}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 - 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$. $\|\overrightarrow{CA}\|^2 = AB^2 + BC^2 - 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$. $7^2 = 6^2 + (\sqrt{43})^2 - 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 49 = 36 + 43 - 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$. $49 = 79 - 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 30 \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 15$.

$$\boxed{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 15}$$

Corrigé de l'Exercice 2

On a un parallélogramme $ABCD$ avec $AB = 5$, $AD = 3$ et $\widehat{DAB} = 60°$.

1. On calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ avec la formule trigonométrique : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{DAB}) = 5 \times 3 \times \cos(60°) = 15 \times \dfrac{1}{2} = 7,5$.

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 7,5}$$

2. Pour calculer la longueur BD, on utilise le théorème d'Al Kashi dans le triangle ABD. Le côté BD est opposé à l'angle $\widehat{DAB}$. $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \times AB \times AD \times \cos(\widehat{DAB})$. $BD^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \times (7,5) = 25 + 9 - 15 = 19$. Donc $BD = \sqrt{19}$.

$$\boxed{BD = \sqrt{19}}$$

3. Pour calculer la longueur AC, on utilise le fait que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. $AC^2 = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AD}\|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$. $AC^2 = 5^2 + 3^2 + 2 \times (7,5) = 25 + 9 + 15 = 49$. Donc $AC = \sqrt{49} = 7$.

$$\boxed{AC = 7}$$

Corrigé de l'Exercice 3

Soient A, B deux points tels que $AB = 6$. Soit O le milieu de $[AB]$. On a $OA = OB = 3$.

1. On utilise la relation $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MO^2 - OA^2 = MO^2 - 3^2 = MO^2 - 9$. L'équation $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ devient $MO^2 - 9 = k \Leftrightarrow MO^2 = k + 9$.

   a) $k = 0 : MO^2 = 9 \Leftrightarrow MO = 3$. L'ensemble des points M est le cercle de centre O et de rayon 3. Ce cercle passe par A et B.

   b) $k = -2 : MO^2 = -2 + 9 = 7 \Leftrightarrow MO = \sqrt{7}$. L'ensemble est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{7}$.

   c) $k = 4 : MO^2 = 4 + 9 = 13 \Leftrightarrow MO = \sqrt{13}$. L'ensemble est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{13}$.

2. Pour $k = -12$, on a $MO^2 = -12 + 9 = -3$. Un carré ne peut pas être négatif. Il n'y a donc aucun point M qui vérifie cette condition.

L'ensemble des points est l'ensemble vide : $\boxed{\emptyset}$.

3. a) On cherche C sur Δ tel que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3$. Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Comme Δ coupe (AB) en A, H est le point A lui-même. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA} = 0$. L'énoncé semble contenir une imprécision. On suppose que Δ est la droite (AB). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC$ si C est du même côté que B par rapport à A. $6 \times AC = 3 \Leftrightarrow AC = 0,5$. C est sur le segment $[AB]$ tel que $AC = 0,5$.

b) L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 3$ est une droite. Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 3$. Ceci est la définition de la droite perpendiculaire à (AB) passant par le point C défini précédemment.

L'ensemble est la droite perpendiculaire à (AB) passant par C.

Corrigé de l'Exercice 4

1. Dans le cercle trigonométrique, un point M repéré par un angle θ a pour coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$. Le point A est repéré par l'angle a et B par l'angle b. Puisque le rayon est 1, les coordonnées des points sont $A(\cos a, \sin a)$ et $B(\cos b, \sin b)$. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont donc :

$$\boxed{\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}} \text{ et } \boxed{\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}}$$

2. On calcule le produit scalaire avec la formule analytique $xx' + yy'$: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

$$\boxed{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b}$$

3. L'angle orienté $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$ est égal à $a - b$. Donc $\widehat{BOA} = a - b$ (ou $b - a$, le cosinus sera le même). On utilise la formule trigonométrique du produit scalaire : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\widehat{BOA})$. Comme A et B sont sur le cercle de rayon 1, on a $OA = 1$ et $OB = 1$. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \times 1 \times \cos(a - b) = \cos(a - b)$.

$$\boxed{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos(a - b)}$$

4. En égalant les deux expressions de $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ trouvées aux questions 2 et 3, on obtient la formule d'addition pour le cosinus :

$$\boxed{\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b}$$

Pour trouver $\cos(a + b)$, on remplace b par $-b$ dans la formule précédente : $\cos(a - (-b)) = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b)$. Comme $\cos(-b) = \cos b$ (fonction paire) et $\sin(-b) = -\sin b$ (fonction impaire), on obtient :

$$\boxed{\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

5. On veut calculer les valeurs pour $\frac{\pi}{12}$. On remarque que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$. Utilisons la deuxième. On applique la formule de $\cos(a - b)$ avec $a = \frac{\pi}{4}$ et $b = \frac{\pi}{6}$. $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$. $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

Pour calculer $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, on utilise la relation fondamentale $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. $\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{6+2+2\sqrt{12}}{16} = 1 - \frac{8+4\sqrt{3}}{16} = 1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{4-2-\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$. Comme $\frac{\pi}{12}$ est dans le premier quadrant, son sinus est positif. $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. On peut simplifier $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ en remarquant que $(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{6+2-2\sqrt{12}}{4} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = 2-\sqrt{3}$. Une autre méthode plus simple est $\sin(\frac{\pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$