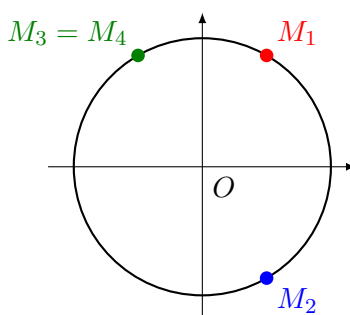


Exercice 1 :

1. Pour placer les points, on cherche leur mesure principale (l'angle équivalent dans $]-\pi ; \pi]$).

- $M_1 : \frac{\pi}{3}$. C'est déjà une mesure principale.
- $M_2 : \frac{17\pi}{3} = \frac{18\pi - \pi}{3} = 6\pi - \frac{\pi}{3}$. Comme $6\pi = 3 \times 2\pi$, cet angle est équivalent à $-\frac{\pi}{3}$.
- $M_3 : \frac{38\pi}{3} = \frac{36\pi + 2\pi}{3} = 12\pi + \frac{2\pi}{3}$. Comme $12\pi = 6 \times 2\pi$, cet angle est équivalent à $\frac{2\pi}{3}$.
- $M_4 : \frac{50\pi}{3} = \frac{48\pi + 2\pi}{3} = 16\pi + \frac{2\pi}{3}$. Comme $16\pi = 8 \times 2\pi$, cet angle est aussi équivalent à $\frac{2\pi}{3}$.

Les points M_3 et M_4 sont donc confondus.



2. En utilisant les mesures principales trouvées :

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos\left(\frac{17\pi}{3}\right) &= \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) & \text{b) } \sin\left(-\frac{38\pi}{3}\right) &= \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) & \text{c) } \cos\left(\frac{50\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}. & &= -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}. & &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \boxed{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Exercice 2 :

On a $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

1. On utilise la relation fondamentale $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

$$\begin{aligned} \sin^2(x) &= 1 - \cos^2(x) \\ &= 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

Les deux valeurs possibles pour $\sin x$ sont donc $\boxed{\frac{2}{3}}$ et $\boxed{-\frac{2}{3}}$.

2. On sait que $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$. Cet intervalle correspond au quatrième quadrant, où le sinus est négatif. $\boxed{\sin x = -\frac{2}{3}}$.

3. On utilise $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ et $\sin x = -\frac{2}{3}$.

$$\text{a) } \begin{cases} \cos(-x) = \cos(x) = \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \sin(-x) = -\sin(x) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos(x) = -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \sin(\pi - x) = \sin(x) = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \cos(x + \pi) = -\cos(x) = -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \sin(x + \pi) = -\sin(x) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) = -\frac{2}{3} \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) = \frac{\sqrt{5}}{3} \end{cases}$$

Exercice 3 :

$$1. \cos(x) = \frac{1}{2} \text{ sur }]-\pi; \pi]. \quad \mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right\}.$$

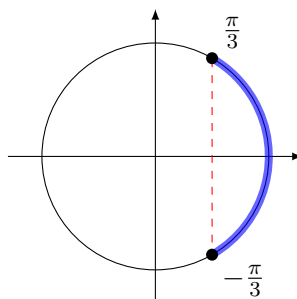
$$2. 2\sin(x) = -1 \Leftrightarrow \sin(x) = -\frac{1}{2} \text{ sur } [0; 2\pi[. \quad \mathcal{S} = \left\{ \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right\}.$$

$$3. \sqrt{2}\cos(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ sur } [0; 6\pi[. \quad \mathcal{S} = \left\{ \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}; \frac{19\pi}{4}; \frac{21\pi}{4} \right\}.$$

$$4. 2\sin(x) + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ sur }]-2\pi; \pi]. \quad \mathcal{S} = \left\{ -\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3} \right\}.$$

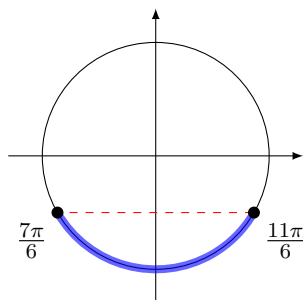
Exercice 4 :

1. $\cos(x) \geq \frac{1}{2}$ sur $]-\pi; \pi]$. On cherche sur le cercle les points dont l'abscisse (le cosinus) est supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$. Les bornes sont données par les solutions de $\cos(x) = \frac{1}{2}$, soit $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$.



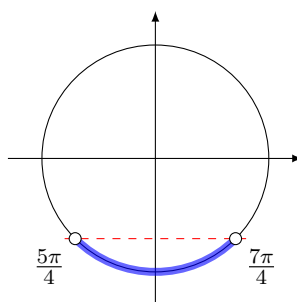
$$\mathcal{S} = \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right].$$

2. $2\sin(x) \leq -1 \Leftrightarrow \sin(x) \leq -\frac{1}{2}$ sur $[0; 2\pi[$. On cherche les points dont l'ordonnée (le sinus) est inférieure ou égale à $-\frac{1}{2}$. Les bornes sont $\frac{7\pi}{6}$ et $\frac{11\pi}{6}$.



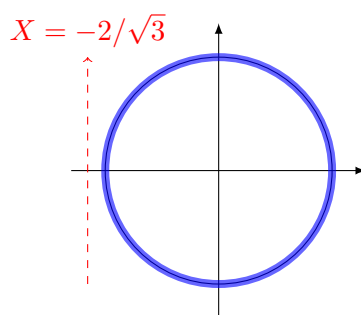
$$\mathcal{S} = \left[\frac{7\pi}{6} ; \frac{11\pi}{6} \right]$$

3. $\sqrt{2}\sin(x) + 1 < 0 \Leftrightarrow \sin(x) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0; 2\pi[$. On cherche les points dont l'ordonnée est strictement inférieure à $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Les bornes (exclues) sont $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$.



$$\mathcal{S} = \left] \frac{5\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4} \right]$$

4. $\sqrt{3}\cos(x) + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \cos(x) \geq -\frac{2}{\sqrt{3}}$. On sait que $\sqrt{3} \approx 1.732$, donc $-\frac{2}{\sqrt{3}} \approx -1.155$. Comme la valeur minimale de $\cos(x)$ est -1 , la condition $\cos(x) \geq -1.155$ est toujours vraie.



$$\mathcal{S} =]-\pi ; \pi]$$

Exercice 5 :

- a) On simplifie chaque terme de $A(x)$.

$$\bullet \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

- $\cos(3\pi + x) = \cos(\pi + x) = -\cos(x)$

- $\cos(-x) = \cos(x)$

$$A(x) = 3(\cos x) + 2 \cos x - \cos x - 2 \cos x = (3 + 2 - 1 - 2) \cos x. \text{ On a bien } \boxed{A(x) = 2 \cos x}.$$

b) Résoudre $A(x) = -\sqrt{2}$ revient à résoudre $2 \cos x = -\sqrt{2}$, soit $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $] -\pi ; \pi]$.

$$\boxed{S = \left\{ -\frac{3\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4} \right\}}.$$