Exercice 1

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\ln(x^3) \leq \ln(x) + \ln(27x+20)$.

1. Ensemble de définition : L'inéquation est définie si et seulement si les arguments des logarithmes sont strictement positifs :

- $x^3 > 0 \iff x > 0$
- $x > 0$
- $27x + 20 > 0 \iff 27x > -20 \iff x > -\dfrac{20}{27}$

L'ensemble de définition est donc $D =]0\,;\,+\infty[$.

2. Résolution : Pour tout $x \in D$:

$$\begin{aligned}
\ln(x^3) &\leq \ln(x) + \ln(27x+20) \\
\ln(x^3) &\leq \ln\big(x(27x+20)\big) \quad \text{car } \ln(a)+\ln(b)=\ln(ab) \\
x^3 &\leq x(27x+20) \quad \text{car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0;+\infty[\\
x^3 &\leq 27x^2 + 20x \\
x^3 - 27x^2 - 20x &\leq 0 \\
x(x^2 - 27x - 20) &\leq 0
\end{aligned}$$

Puisque $x \in D$, on a $x > 0$. Le signe de l'expression dépend donc uniquement du signe du trinôme $x^2 - 27x - 20$.

Étudions le signe de $x^2 - 27x - 20$: $\Delta = (-27)^2 - 4 \times 1 \times (-20) = 729 + 80 = 809$. $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{27 - \sqrt{809}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{27 + \sqrt{809}}{2}$$

On remarque que $\sqrt{809} \approx 28,4$, donc $x_1 < 0$ et $x_2 > 0$. Le trinôme est négatif ou nul (signe contraire de $a = 1$) entre les racines, c'est-à-dire pour $x \in [x_1\,;\,x_2]$.

Compte tenu de l'ensemble de définition $D =]0\,;\,+\infty[$, on ne retient que l'intersection avec D :

$$S = \left]0\,;\,\frac{27+\sqrt{809}}{2}\right]$$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $I =]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 6x + 4\ln(x)$.

1. **Limites aux bornes :**

   En 0 **:** $\lim_{x\to 0^+} x^2 - 6x = 0$ et $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

   Par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty}$.

Interprétation graphique : La courbe C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

En $+\infty$ **:** On a une forme indéterminée "$\infty - \infty$". Factorisons par x^2 (terme prépondérant) :
$f(x) = x^2 \left(1 - \frac{6}{x} + 4\frac{\ln(x)}{x^2}\right)$.

Or, par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$. De plus, $\lim_{x\to+\infty} \frac{6}{x} = 0$.

Donc $\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{6}{x} + 4\frac{\ln(x)}{x^2}\right) = 1$.

Comme $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

2. **Dérivabilité :** La fonction $x \mapsto x^2 - 6x$ est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$.

   La fonction $x \mapsto 4\ln(x)$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.

   Donc, par somme, f est dérivable sur I. Par composition de fonctions dérivables, elle est même deux fois dérivable sur I.

3. **Calcul de la dérivée :** Pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = 2x - 6 + 4 \times \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x}$$

   On peut factoriser le numérateur (racines évidentes ou Δ) : $2(x^2 - 3x + 2)$.

   Les racines de $x^2 - 3x + 2$ sont 1 et 2. D'où : $\boxed{f'(x) = \frac{2(x-1)(x-2)}{x}}$.

4. **Tableau de variations :** Sur I, $x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-1)(x-2)$.

   C'est un trinôme du second degré, positif à l'extérieur des racines 1 et 2, négatif entre elles.

   Calcul des images : $f(1) = 1 - 6 + 4\ln(1) = -5$. $f(2) = 4 - 12 + 4\ln(2) = -8 + 4\ln(2) \approx -5,23$.

x	0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$-8 + 4\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

5. **Équation** $f(x) = 0$ **:**

   - Sur l'intervalle $]0\,;\,2]$, le maximum de la fonction f est -5. Ainsi, pour tout $x \in]0\,;\,2]$, $f(x) \leq -5 < 0$. L'équation n'a pas de solution sur cet intervalle.
   - Sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus, $f(2) = -8 + 4\ln(2) < 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[2\,;\,+\infty[$.

   Conclusion : L'équation (E) admet une **unique solution** sur I.

6. **Dérivée seconde :** On part de $f'(x) = 2x - 6 + 4x^{-1}$.

$$f''(x) = 2 - 0 - 4x^{-2} = 2 - \frac{4}{x^2} = \frac{2x^2 - 4}{x^2} = \boxed{\frac{2(x^2-2)}{x^2}}$$

7. **Convexité et point d'inflexion :** Sur I, $x^2 > 0$, donc le signe de $f''(x)$ dépend de $x^2 - 2$. $x^2 - 2$ s'annule pour $x = \sqrt{2}$ (car $x > 0$).

   - Sur $]0\,;\,\sqrt{2}[$, $x^2 - 2 < 0 \implies f''(x) < 0$. La fonction est **concave**.
   - Sur $]\sqrt{2}\,;\,+\infty[$, $x^2 - 2 > 0 \implies f''(x) > 0$. La fonction est **convexe**.

   La dérivée seconde s'annule et change de signe en $x = \sqrt{2}$, donc C_f admet un point d'inflexion A d'abscisse $\sqrt{2}$. Ordonnée de A : $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 6\sqrt{2} + 4\ln(\sqrt{2}) = 2 - 6\sqrt{2} + 4 \times \frac{1}{2}\ln(2) = 2 - 6\sqrt{2} + 2\ln(2)$. Coordonnées exactes : $\boxed{A\left(\sqrt{2}\,;\,2 - 6\sqrt{2} + 2\ln(2)\right)}$.

8. **Position relative de (AM) et C_f :** Soit $t \in I \setminus \{\sqrt{2}\}$. M est un point de la courbe C_f d'abscisse t. Le segment $[AM]$ est une **corde** (ou sécante) de la courbe reliant le point d'inflexion A à M. Nous utilisons la définition de la convexité :

   - Sur un intervalle où f est convexe, la courbe est située **au-dessous** de ses cordes.
   - Sur un intervalle où f est concave, la courbe est située **au-dessus** de ses cordes.

   Ainsi :

   - Si $t > \sqrt{2}$: Sur l'intervalle $[\sqrt{2}\,;\,t]$, f est convexe. Donc C_f est **au-dessous** du segment $[AM]$.
   - Si $0 < t < \sqrt{2}$: Sur l'intervalle $[t\,;\,\sqrt{2}]$, f est concave. Donc C_f est **au-dessus** du segment $[AM]$.

Exercice 3

Soit f définie sur $J =]-\frac{1}{3}\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right)$.

1. **Limite en $-\frac{1}{3}$:** Posons $X = \frac{3x+1}{x+1}$. Quand $x \to -\frac{1}{3}^+$, $3x + 1 \to 0^+$ et $x + 1 \to \frac{2}{3}$. Donc $X \to 0^+$. Or $\lim_{X\to 0^+} \ln(X) = -\infty$. Donc $\boxed{\lim_{x\to -\frac{1}{3}^+} f(x) = -\infty}$. *Interprétation :* Asymptote verticale d'équation $x = -\frac{1}{3}$.
2. **Limite en $+\infty$:** $X = \frac{3x+1}{x+1} = \frac{x(3+1/x)}{x(1+1/x)} = \frac{3+1/x}{1+1/x}$. Quand $x \to +\infty$, $1/x \to 0$, donc $X \to 3$. Ainsi, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln(3)}$. *Interprétation :* Asymptote horizontale d'équation $y = \ln(3)$.
3. **Dérivabilité :** La fonction $u : x \mapsto \frac{3x+1}{x+1}$ est une fonction rationnelle dérivable sur son domaine de définition, et sur J, $u(x) > 0$. La fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$. Donc par composition, f est dérivable sur J.

4. **Calcul de** $f'(x)$ **:** On utilise la formule $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$. Calculons $u'(x)$ avec la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$:
   $u'(x) = \dfrac{3(x+1) - 1(3x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{3x+3-3x-1}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$. Donc :

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{3x+1}{x+1}} = \frac{2}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{3x+1} = \boxed{\frac{2}{(x+1)(3x+1)}}$$

5. **Sens de variation :** Pour tout $x \in J$, $x > -\frac{1}{3}$. Donc $3x+1 > 0$ et $x+1 > 0$. Ainsi, $f'(x) > 0$. La fonction f est **strictement croissante** sur J.

x	$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln(3)$

6. **Suite** (u_n) **:** $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
7. (a) **Démonstration par récurrence :** Soit $P(n)$ la propriété : $\dfrac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$.

   Initialisation : Pour $n = 0$. $u_0 = 3$. $u_1 = f(3) = \ln\left(\dfrac{9+1}{3+1}\right) = \ln\left(\dfrac{10}{4}\right) = \ln(2,5) \approx 0,916$. On a bien $0,5 \leq 0,916 \leq 3$. Donc $P(0)$ est vraie.

   Hérédité : Supposons $P(k)$ vraie pour un entier k fixé : $\dfrac{1}{2} \leq u_{k+1} \leq u_k$. La fonction f est strictement croissante sur J. En appliquant f à l'inégalité (en vérifiant que les termes sont dans le domaine, ce qui est le cas car $\geq 1/2 > -1/3$) : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leq f(u_{k+1}) \leq f(u_k)$
   $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}$. Or $f(0,5) = \ln\left(\dfrac{1,5+1}{0,5+1}\right) = \ln\left(\dfrac{2,5}{1,5}\right) = \ln\left(\dfrac{5}{3}\right) \approx 0,51$. Donc $\dfrac{1}{2} \leq 0,51 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}$. La propriété est héréditaire.

   Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$.

   (b) **Convergence :** La suite (u_n) est décroissante (car $u_{n+1} \leq u_n$) et minorée par $\dfrac{1}{2}$. D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite $\ell \geq \dfrac{1}{2}$.
8. **Étude de** $g(x) = f(x) - x$ **sur** $[0\,;+\infty[$ **:**

   (a) **Dérivée :** $g'(x) = f'(x) - 1 = \dfrac{2}{(x+1)(3x+1)} - 1$. Mise au même dénominateur :

$$g'(x) = \frac{2-(3x^2+4x+1)}{(x+1)(3x+1)} = \frac{-3x^2-4x+1}{(x+1)(3x+1)}$$

   (b) **Variations de** g **:** Sur $[0\,;+\infty[$, le dénominateur est positif. Le signe est celui de $-3x^2-4x+1$.

$\Delta = 16 - 4(-3)(1) = 28$. Racine positive : $x_0 = \dfrac{4-\sqrt{28}}{-6} = \dfrac{-4+2\sqrt{7}}{6} = \dfrac{\sqrt{7}-2}{3} \approx 0,215$. Le trinôme est positif entre les racines (donc sur $[0\,;\,x_0]$) et négatif après. Donc g est croissante sur $[0\,;\,x_0]$ et décroissante sur $[x_0\,;\,+\infty[$.

(c) **Limite en $+\infty$:** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln(3)$ et $\lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$. Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty}$.

(d) **Unicité de la solution :** On a $g(0) = f(0) - 0 = \ln(1) = 0$. Donc 0 est une solution. Sur $[0\,;\,x_0]$, g est croissante et $g(0) = 0$, donc $g(x) > 0$ pour $x \in]0\,;\,x_0]$. Sur $[x_0\,;\,+\infty[$, g est continue et strictement décroissante. $g(x_0) > 0$ et $\lim_{+\infty} g = -\infty$. D'après le TVI, il existe une unique solution α dans $]x_0\,;\,+\infty[$ telle que $g(\alpha) = 0$. Comme $\alpha > x_0 > 0$, α est bien **non nulle**.

(e) **Algorithme :** On cherche α. On sait que sur $[x_0\,;\,+\infty[$, g est décroissante. Au départ $x = 0,22$ ($> x_0$), donc $g(0,22)$ est positif (on est "avant" α). Tant que $g(x) > 0$, on incrémente x. Dès que $g(x) \leq 0$, on a dépassé α.

```
from math import *
x=0.22
while log((3*x+1)/(x+1)) - x > 0 :
      x = x + 0.01
print(x)
```

(f) **Dernière valeur :** La solution α vérifie $f(\alpha) = \alpha$. C'est la limite de la suite (u_n). On sait que $\alpha \approx 0,52$ (voir question suivante ou calculatrice). L'algorithme part de $0,22$ et ajoute $0,01$ tant que $x < \alpha$. Il s'arrêtera à la première valeur supérieure à α. Si $\alpha \approx 0,523$, l'algorithme affichera **0,53**.

(g) **Valeur approchée de ℓ :** La limite ℓ de la suite vérifie $f(\ell) = \ell$, soit $g(\ell) = 0$. Comme $u_n \geq 1/2 > 0$, $\ell \neq 0$, donc $\ell = \alpha$. À la calculatrice (intersection de $y = \ln(\frac{3x+1}{x+1})$ et $y = x$) : $\boxed{\ell \approx 0,52}$.