Exercice 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\ln(x^3) \leq \ln(x) + \ln(27x + 20)$.

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 6x + 4\ln(x)$.
On pose $I =]0\,;\,+\infty[$.
C_f est la courbe de la fonction f dans un repère orthogonal du plan.
A est le point de C_f d'abscisse $\sqrt{2}$.

1. Déterminer puis interpréter graphiquement les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition I.
2. Justifier que la fonction f est deux fois dérivable sur I.
3. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de I.
4. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f sur I.
5. Soit l'équation (E) : $f(x) = 0$.
   Montrer que l'équation (E) admet une unique solution dans l'intervalle I.
6. Montrer que pour tout réel x de I, on a : $f''(x) = \dfrac{2}{x^2}(x^2 - 2)$.
7. Étudier la convexité de la fonction f sur I.
   Préciser les coordonnées exactes des éventuels points d'inflexion de C_f.
8. On considère un réel t strictement positif et différent de $\sqrt{2}$.
   Soit un point $M(t\,;\,f(t))$.
   Étudier selon les valeurs réelles de t les positions relatives de (AM) et C_f.

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur $]-\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x+1}{x+1}\right)$.
C_f est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $-\dfrac{1}{3}$, et en donner une interprétation graphique.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$, et en donner une interprétation graphique.
3. Justifier que la fonction f est dérivable sur $]-\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty[$.
4. Démontrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]-\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)(3x+1)}$.

5. Étudier le sens de variation de la fonction f. Puis dresser pour finir son tableau de variation.
6. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
7. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ.
8. L'objectif de cette partie est de déterminer une valeur approchée de ℓ.
   On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
   (a) Déterminer $g'(x)$.
   (b) Étudier le sens de variations de la fonction g sur $[0\,;\,+\infty[$.
   (c) Déterminer la limite de g en $+\infty$.
   (d) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α non nulle.
   (e) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin que la dernière valeur prise par la variable x soit une valeur approchée de α par excès à $0,01$ près.

```
from math import *
x=0.22
while log((3*x+1)/(x+1))....................... :
      x=..................
print ...............
```

   (f) Déterminer alors la dernière valeur prise par la valeur lors de l'exécution de l'algorithme.
   (g) Donner une valeur approchée au centième de la limite ℓ de la suite (u_n).