Exercice 1

1. Pour déterminer si la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3x + 2$ est dérivable en $a = 1$, nous devons étudier la limite de son taux d'accroissement lorsque h tend vers 0. Le taux d'accroissement de f entre 1 et $1 + h$ est :
$$\tau(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \quad \text{(pour } h \neq 0\text{)}$$
Calculons d'abord les images :
   - $f(1) = 1^2 - 3(1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$.
   - $f(1+h) = (1+h)^2 - 3(1+h) + 2 = (1+2h+h^2) - (3+3h) + 2 = 1+2h+h^2 - 3 - 3h + 2 = h^2 - h$.

   On remplace dans l'expression du taux d'accroissement :
$$\tau(h) = \frac{(h^2 - h) - 0}{h} = \frac{h(h-1)}{h}$$
Pour tout $h \neq 0$, on peut simplifier par h :
$$\tau(h) = h - 1$$
On calcule maintenant la limite :
$$\lim_{h \to 0} \tau(h) = \lim_{h \to 0} (h - 1) = 0 - 1 = -1$$
La limite est un nombre réel fini. Par conséquent, la fonction f est dérivable en 1 et son nombre dérivé est $\boxed{f'(1) = -1}$.

2. De même, pour la fonction g définie par $g(x) = \frac{4}{x}$, étudions la dérivabilité en $a = 2$. Le taux d'accroissement de g entre 2 et $2 + h$ est :
$$\tau(h) = \frac{g(2+h) - g(2)}{h} \quad \text{(pour } h \neq 0\text{)}$$
Calculons les images :
   - $g(2) = \frac{4}{2} = 2$.
   - $g(2+h) = \frac{4}{2+h}$.

   On remplace dans l'expression :
$$\tau(h) = \frac{\frac{4}{2+h} - 2}{h}$$
Mettons le numérateur au même dénominateur :
$$\tau(h) = \frac{\frac{4 - 2(2+h)}{2+h}}{h} = \frac{4 - 4 - 2h}{h(2+h)} = \frac{-2h}{h(2+h)}$$

Pour tout $h \neq 0$, on simplifie par h :

$$\tau(h) = \frac{-2}{2+h}$$

On calcule la limite :

$$\lim_{h \to 0} \tau(h) = \lim_{h \to 0} \frac{-2}{2+h} = \frac{-2}{2+0} = -1$$

La limite est un nombre réel fini. Par conséquent, la fonction g est dérivable en 2 et son nombre dérivé est $\boxed{g'(2) = -1}$.

Exercice 2

Pour chaque affirmation, nous nous basons sur l'interprétation graphique du nombre dérivé (coefficient directeur de la tangente) et les informations données.

1. **Affirmation FAUSSE.** Le nombre dérivé $f'(-3)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse $x = -3$. En observant le graphique, on voit qu'au point d'abscisse -3, la courbe est croissante. La tangente en ce point a donc un coefficient directeur **strictement positif**. Le nombre -2 est négatif, donc l'affirmation est fausse.
2. **Affirmation FAUSSE.** Le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse -2 est $f'(-2)$. La tangente en ce point est la droite T_1. Sur le graphique, T_1 est une droite **horizontale**. Le coefficient directeur d'une droite horizontale est toujours 0. Donc, $f'(-2) = 0$, et non 3.
3. **Affirmation VRAIE.** L'équation $f'(x) = 0$ a pour solutions les abscisses des points où la tangente à la courbe C_f est horizontale. Graphiquement, on identifie deux tels points sur l'intervalle $[-3\,;\,2]$:
   - Un premier point d'abscisse $x = -2$, où la tangente T_1 est horizontale (sommet local).
   - Un second point, correspondant au minimum local de la fonction, dont l'abscisse est visiblement comprise entre 1 et 2.

   Il y a donc bien exactement deux solutions à l'équation $f'(x) = 0$ sur cet intervalle.
4. **Affirmation VRAIE.** La droite T_4 est la tangente à C_f au point d'abscisse 2. L'énoncé nous dit qu'elle passe par les points $A(1\,;\,-13)$ et $B(2\,;\,3)$. On peut calculer son coefficient directeur m :

   $$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-(-13)}{2-1} = \frac{16}{1} = 16$$

   L'équation de T_4 est donc de la forme $y = 16x + p$. Pour trouver l'ordonnée à l'origine p, on utilise les coordonnées d'un des points, par exemple $B(2\,;\,3)$:

   $$3 = 16 \times 2 + p \Leftrightarrow 3 = 32 + p \Leftrightarrow p = 3 - 32 = -29$$

   L'équation réduite de la droite T_4 est bien $\boxed{y = 16x - 29}$.

Exercice 3

1. La fonction $f(x) = \dfrac{x+2}{2x-3}$ est définie si et seulement si son dénominateur est différent de zéro.

$$2x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq 3 \Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2}$$

L'ensemble de définition de f est donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$. Soit $\boxed{\mathcal{D}_f = \left]-\infty\,;\,\dfrac{3}{2}\right[\cup \left]\dfrac{3}{2}\,;\,+\infty\right[}$.

2. Pour étudier la dérivabilité en $a = 2$, on calcule la limite du taux d'accroissement.

$$\tau(h) = \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

On a $f(2) = \dfrac{2+2}{2(2)-3} = \dfrac{4}{1} = 4$. Et $f(2+h) = \dfrac{(2+h)+2}{2(2+h)-3} = \dfrac{h+4}{4+2h-3} = \dfrac{h+4}{2h+1}$.

$$\tau(h) = \frac{\frac{h+4}{2h+1} - 4}{h} = \frac{\frac{h+4-4(2h+1)}{2h+1}}{h} = \frac{h+4-8h-4}{h(2h+1)} = \frac{-7h}{h(2h+1)}$$

Pour $h \neq 0$, $\tau(h) = \dfrac{-7}{2h+1}$.

$$\lim_{h\to 0} \tau(h) = \lim_{h\to 0} \frac{-7}{2h+1} = \frac{-7}{1} = -7$$

La limite est finie, donc f est dérivable en 2 et $\boxed{f'(2) = -7}$.

3. Pour trouver l'équation de la tangente en un point d'abscisse a quelconque, il faut l'expression de $f'(a)$. Calculons-la avec la définition.

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{a+h+2}{2(a+h)-3} - \frac{a+2}{2a-3}\right)$$

Le numérateur de l'expression entre crochets est : $N = (a+h+2)(2a-3) - (a+2)(2a+2h-3)$ $N = (2a^2 - 3a + 2ah - 3h + 4a - 6) - (2a^2 + 2ah - 3a + 4a + 4h - 6)$ $N = (2a^2 + a + 2ah - 3h - 6) - (2a^2 + a + 2ah + 4h - 6)$ $N = -3h - 4h = -7h$. Ainsi, $\tau(h) = \dfrac{1}{h}\dfrac{-7h}{(2(a+h)-3)(2a-3)} = \dfrac{-7}{(2a+2h-3)(2a-3)}$. En passant à la limite, $f'(a) = \lim_{h\to 0} \tau(h) = \dfrac{-7}{(2a-3)^2}$. L'équation générale de la tangente est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

$$\boxed{y = \frac{-7}{(2a-3)^2}(x-a) + \frac{a+2}{2a-3}}$$

Pour $a = 2$, on a $f(2) = 4$ et $f'(2) = -7$. L'équation est : $y = -7(x-2) + 4 \Leftrightarrow y = -7x + 14 + 4 \Leftrightarrow$ $\boxed{y = -7x + 18}$.

4. On veut étudier le signe de $d(x) = f(x) - (-7x + 18)$ sur $\left]\dfrac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$. L'expression $y = -7x + 18$ est l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 2. On étudie donc la position relative de la

courbe et de sa tangente en 2.

$$d(x) = \frac{x+2}{2x-3} - (-7x+18) = \frac{x+2+(7x-18)(2x-3)}{2x-3}$$

$$d(x) = \frac{x+2+(14x^2-21x-36x+54)}{2x-3} = \frac{14x^2-56x+56}{2x-3}$$

On factorise le numérateur : $14(x^2-4x+4) = 14(x-2)^2$.

$$d(x) = \frac{14(x-2)^2}{2x-3}$$

Sur l'intervalle $\left]\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$, on a $x > \frac{3}{2}$, donc $2x > 3$, et $2x-3 > 0$. Le dénominateur est toujours positif. Le numérateur, $14(x-2)^2$, est un carré, il est donc toujours positif ou nul. Il s'annule uniquement pour $x = 2$. Le signe de $d(x)$ est donc positif ou nul.

Interprétation graphique :

- Pour tout $x \in \left]\frac{3}{2}\,;+\infty\right[\setminus \{2\}$, on a $d(x) > 0$, ce qui signifie que la courbe C_f est **strictement au-dessus** de sa tangente T.
- Pour $x = 2$, on a $d(2) = 0$, ce qui signifie que la courbe C_f et sa tangente T **se touchent** (c'est le point de tangence).

Exercice 4

1. $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x-5}$ est définie si $2x-5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{5}{2}$. Donc $\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{2}\right\}}$.
2. *Note : il y a une coquille dans l'énoncé. Le numérateur du taux d'accroissement est -13, comme le suggère le bonus, et non 13.* On utilise la formule corrigée : $T(h) = \dfrac{-13}{(2(a+h)-5)(2a-5)}$. Le nombre dérivé $f'(a)$ est la limite de $T(h)$ quand $h \to 0$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{-13}{(2(a+h)-5)(2a-5)} = \frac{-13}{(2a-5)(2a-5)} = \frac{-13}{(2a-5)^2}$$

   Ainsi, $\boxed{f'(a) = \dfrac{-13}{(2a-5)^2}}$.
3. Une tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -x$ si son coefficient directeur est égal à -1. On cherche donc a tel que $f'(a) = -1$.

$$\frac{-13}{(2a-5)^2} = -1 \Leftrightarrow (2a-5)^2 = 13$$

   Cette équation équivaut à :

$$2a-5 = \sqrt{13} \quad \text{ou} \quad 2a-5 = -\sqrt{13}$$

$$2a = 5+\sqrt{13} \quad \text{ou} \quad 2a = 5-\sqrt{13}$$

$$a = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \quad \text{ou} \quad a = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$$

Les deux solutions sont valides. Il y a donc deux tangentes parallèles à la droite $y = -x$, aux points d'abscisses $\boxed{a_1 = \frac{5-\sqrt{13}}{2} \text{ et } a_2 = \frac{5+\sqrt{13}}{2}}$.

Bonus

Démontrons la formule $T(h) = \frac{-13}{(2(a+h)-5)(2a-5)}$. $T(h) = \frac{1}{h}\left[\frac{3(a+h)-1}{2(a+h)-5} - \frac{3a-1}{2a-5}\right]$. Mettons au même dénominateur :

$$T(h) = \frac{1}{h}\left[\frac{(3a+3h-1)(2a-5)-(3a-1)(2a+2h-5)}{(2a+2h-5)(2a-5)}\right]$$

Développons le numérateur N : $N = (6a^2-15a+6ah-15h-2a+5)-(6a^2+6ah-15a-2a-2h+5)$ $N = (6a^2-17a+6ah-15h+5)-(6a^2-17a+6ah-2h+5)$ $N = -15h-(-2h) = -13h$. On remplace dans $T(h)$:

$$T(h) = \frac{1}{h}\cdot\frac{-13h}{(2(a+h)-5)(2a-5)} = \frac{-13}{(2(a+h)-5)(2a-5)}$$

La formule est démontrée.