Exercice 1

1. Le nombre dérivé $f'(a)$ correspond au coefficient directeur (ou pente) de la tangente à la courbe C au point d'abscisse a.

   - Pour calculer $f'(1)$, on cherche le coefficient directeur de la tangente T. On choisit deux points distincts sur la droite T. Par exemple, le point $A(1\,;\,0)$ et le point $B(0\,;\,2)$. Le coefficient directeur est donné par la formule $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

   $$f'(1) = \frac{2-0}{0-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

   Donc, $\boxed{f'(1) = -2}$.
   - Pour calculer $f'(2)$, on cherche le coefficient directeur de la tangente D. La droite D est une droite horizontale. Le coefficient directeur d'une droite horizontale est toujours nul. Donc, $\boxed{f'(2) = 0}$.

2. Pour retrouver le nombre dérivé de f en 1 par le calcul, on utilise la définition. On étudie la limite du taux d'accroissement $\tau(h)$ de f entre 1 et $1+h$ quand h tend vers 0.

   $$\tau(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \quad \text{pour } h \neq 0$$

   On a $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

   - On calcule d'abord $f(1) = 1^2 - 4(1) + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$.
   - On calcule ensuite $f(1+h) = (1+h)^2 - 4(1+h) + 3$.

   $$f(1+h) = (1 + 2h + h^2) - (4 + 4h) + 3 = 1 + 2h + h^2 - 4 - 4h + 3 = h^2 - 2h$$

   On peut maintenant exprimer le taux d'accroissement :

   $$\tau(h) = \frac{(h^2 - 2h) - 0}{h} = \frac{h(h-2)}{h}$$

   Pour $h \neq 0$, on peut simplifier par h :

   $$\tau(h) = h - 2$$

   On cherche maintenant la limite de $\tau(h)$ lorsque h tend vers 0 :

   $$\lim_{h \to 0} \tau(h) = \lim_{h \to 0} (h - 2) = 0 - 2 = -2$$

   La limite est finie et vaut -2. Donc, la fonction f est dérivable en 1 et son nombre dérivé est $\boxed{f'(1) = -2}$. Ce résultat est cohérent avec la lecture graphique.

Exercice 2

Pour chaque cas, on calcule la limite du taux d'accroissement $\tau(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ quand $h \to 0$.

1. $f(x) = -3x + 2$ et $a = 2$.
   - $f(2) = -3(2) + 2 = -4$.
   - $f(2+h) = -3(2+h) + 2 = -6 - 3h + 2 = -4 - 3h$.

   Le taux d'accroissement est :

   $$\tau(h) = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(-4-3h) - (-4)}{h} = \frac{-3h}{h} = -3$$

   La limite est donc :

   $$\lim_{h \to 0} \tau(h) = \lim_{h \to 0} (-3) = -3$$

   La limite est finie, donc f est dérivable en 2 et $\boxed{f'(2) = -3}$.

2. $f(x) = \dfrac{5}{x}$ et $a = 1$.
   - $f(1) = \dfrac{5}{1} = 5$.
   - $f(1+h) = \dfrac{5}{1+h}$.

   Le taux d'accroissement est :

   $$\tau(h) = \frac{\frac{5}{1+h} - 5}{h} = \frac{\frac{5 - 5(1+h)}{1+h}}{h} = \frac{5 - 5 - 5h}{h(1+h)} = \frac{-5h}{h(1+h)}$$

   Pour $h \neq 0$, on simplifie par h :

   $$\tau(h) = \frac{-5}{1+h}$$

   La limite est donc :

   $$\lim_{h \to 0} \tau(h) = \lim_{h \to 0} \frac{-5}{1+h} = \frac{-5}{1+0} = -5$$

   La limite est finie, donc f est dérivable en 1 et $\boxed{f'(1) = -5}$.

3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ et $a = -2$.
   - $f(-2) = \dfrac{1}{(-2)^2+1} = \dfrac{1}{4+1} = \dfrac{1}{5}$.
   - $f(-2+h) = \dfrac{1}{(-2+h)^2+1} = \dfrac{1}{(4-4h+h^2)+1} = \dfrac{1}{h^2-4h+5}$.

   Le taux d'accroissement est :

   $$\tau(h) = \frac{\frac{1}{h^2-4h+5} - \frac{1}{5}}{h} = \frac{\frac{5-(h^2-4h+5)}{5(h^2-4h+5)}}{h} = \frac{5 - h^2 + 4h - 5}{5h(h^2-4h+5)} = \frac{-h^2+4h}{5h(h^2-4h+5)}$$

   On factorise le numérateur par h :

   $$\tau(h) = \frac{h(-h+4)}{5h(h^2-4h+5)}$$

Pour $h \neq 0$, on simplifie par h :

$$\tau(h) = \frac{-h+4}{5(h^2-4h+5)}$$

La limite est donc :

$$\lim_{h \to 0} \tau(h) = \frac{-0+4}{5(0^2-4(0)+5)} = \frac{4}{5 \times 5} = \frac{4}{25}$$

La limite est finie, donc f est dérivable en -2 et $\boxed{f'(-2) = \frac{4}{25}}$.

Exercice 3

1. La fonction $f(x) = \sqrt{2x-5}$ est définie si et seulement si l'expression sous la racine est positive ou nulle.

$$2x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 5 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$$

   L'ensemble de définition de f est donc $\mathcal{D}_f = \left[\frac{5}{2} ; +\infty\right[$.

2. On calcule le taux d'accroissement $\tau(h)$ de f entre 3 et $3+h$.
   - $f(3) = \sqrt{2(3)-5} = \sqrt{6-5} = \sqrt{1} = 1$.
   - $f(3+h) = \sqrt{2(3+h)-5} = \sqrt{6+2h-5} = \sqrt{2h+1}$.

   La condition $h \geq -\frac{1}{2}$ assure que $2h+1 \geq 0$, donc $f(3+h)$ est bien défini.

$$\tau(h) = \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{\sqrt{2h+1}-1}{h}$$

   Pour se débarrasser de la racine au numérateur, on multiplie par l'expression conjuguée, qui est $(\sqrt{2h+1}+1)$:

$$\tau(h) = \frac{(\sqrt{2h+1}-1)(\sqrt{2h+1}+1)}{h(\sqrt{2h+1}+1)} = \frac{(\sqrt{2h+1})^2-1^2}{h(1+\sqrt{2h+1})} = \frac{(2h+1)-1}{h(1+\sqrt{2h+1})} = \frac{2h}{h(1+\sqrt{2h+1})}$$

   Pour $h \neq 0$, on peut simplifier par h. On obtient bien :

$$\tau(h) = \frac{2}{1+\sqrt{2h+1}}$$

3. Pour savoir si f est dérivable en 3, on calcule la limite de $\tau(h)$ quand $h \to 0$.

$$\lim_{h \to 0} \tau(h) = \lim_{h \to 0} \frac{2}{1+\sqrt{2h+1}} = \frac{2}{1+\sqrt{2(0)+1}} = \frac{2}{1+\sqrt{1}} = \frac{2}{2} = 1$$

   La limite est finie et vaut 1. On en déduit que f est dérivable en 3 et que $\boxed{f'(3) = 1}$.

4. Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est donnée par la formule $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Ici, $a = 3$. On a calculé $f'(3) = 1$ et $f(3) = 1$. L'équation est donc :

$$y = 1(x-3) + 1$$

$$y = x - 3 + 1$$

$$y = x - 2$$

L'équation de la tangente est $\boxed{y = x - 2}$.

Exercice 4

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est le nombre dérivé $f'(a)$. Pour résoudre cet exercice, nous devons d'abord trouver l'expression de la fonction dérivée $f'(x)$ en utilisant la définition avec un x quelconque.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculons le taux d'accroissement de f entre x et $x + h$: $\tau(h) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{(2(x+h)^3 - (x+h)^2 + 10) - (2x^3 - x^2 + 10)}{h}$
On développe les identités remarquables :

- $(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$
- $(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$

Le numérateur devient : $N = 2(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - (x^2 + 2xh + h^2) + 10 - 2x^3 + x^2 - 10$ $N = 2x^3 + 6x^2h + 6xh^2 + 2h^3 - x^2 - 2xh - h^2 - 2x^3 + x^2$ $N = 6x^2h + 6xh^2 + 2h^3 - 2xh - h^2$ On peut factoriser par h : $N = h(6x^2 + 6xh + 2h^2 - 2x - h)$

Le taux d'accroissement est donc, pour $h \neq 0$: $\tau(h) = \dfrac{h(6x^2 + 6xh + 2h^2 - 2x - h)}{h} = 6x^2 + 6xh + 2h^2 - 2x - h$

On calcule la limite quand $h \to 0$: $\lim_{h \to 0} \tau(h) = 6x^2 + 6x(0) + 2(0)^2 - 2x - 0 = 6x^2 - 2x$. La fonction dérivée de f est donc $f'(x) = 6x^2 - 2x$.

1. Une tangente est parallèle à l'axe des abscisses si son coefficient directeur est nul. On cherche donc les abscisses x telles que $f'(x) = 0$.

$$6x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(3x - 1) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

$$2x = 0 \quad \text{ou} \quad 3x - 1 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{3}$$

Oui, il existe deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses, aux points d'abscisses $\boxed{0 \text{ et } \frac{1}{3}}$.

2. On cherche s'il existe des tangentes de coefficient directeur -1. Il faut donc résoudre l'équation $f'(x) = -1$.

$$6x^2 - 2x = -1 \Leftrightarrow 6x^2 - 2x + 1 = 0$$

C'est une équation du second degré. On calcule son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

$$\Delta = (-2)^2 - 4(6)(1) = 4 - 24 = -20$$

Comme $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution réelle. Non, il n'existe aucune tangente à la courbe de f de coe

Exercice 5

1. L'équation de la tangente T au point d'abscisse 0 est $y = g'(0)(x-0) + g(0)$.
   - On calcule $g(0) = 0^3 - 5(0)^2 + 3(0) = 0$.
   - On calcule le nombre dérivé $g'(0)$ en étudiant la limite du taux d'accroissement en 0.

   $$\tau(h) = \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \frac{g(h) - 0}{h} = \frac{h^3 - 5h^2 + 3h}{h}$$

   Pour $h \neq 0$, on simplifie par h :
   $$\tau(h) = h^2 - 5h + 3$$

   On calcule la limite :

   $$g'(0) = \lim_{h \to 0} \tau(h) = \lim_{h \to 0} (h^2 - 5h + 3) = 0^2 - 5(0) + 3 = 3$$

   L'équation de la tangente est donc :

   $$y = 3(x-0) + 0 \Leftrightarrow y = 3x$$

   On a bien montré que l'équation de la tangente T est $\boxed{y = 3x}$.
2. Pour déterminer la position relative de la courbe de g (notée C_g) et de sa tangente T, on étudie le signe de leur différence : $d(x) = g(x) - y_T$.

   $$d(x) = (x^3 - 5x^2 + 3x) - (3x) = x^3 - 5x^2$$

   On factorise l'expression pour étudier son signe plus facilement :

   $$d(x) = x^2(x-5)$$

   On étudie le signe de cette expression sur l'intervalle $[-1\,;\,8]$.
   - Le terme x^2 est toujours positif ou nul. Il s'annule pour $x = 0$.
   - Le terme $x - 5$ est positif si $x > 5$, négatif si $x < 5$, et nul si $x = 5$.

   On dresse un tableau de signes sur l'intervalle $[-1\,;\,8]$:

Conclusion :

- Sur les intervalles $[-1\,;\,0[$ et $]0\,;\,5[$, $d(x) < 0$, donc la courbe C_g **est en dessous** de la tangente T.
- Sur l'intervalle $]5\,;\,8]$, $d(x) > 0$, donc la courbe C_g **est au-dessus** de la tangente T.
- Pour $x = 0$ et $x = 5$, $d(x) = 0$, donc la courbe C_g **et la tangente T se coupent**. (En $x = 0$, c'est le point de tangence, et en $x = 5$, c'est un autre point d'intersection).