Exercice 1 : (4 points)

1. La suite (u_n) est définie par $u_n = 3n^2 - 5$.

   Lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes ($n \to +\infty$), le terme n^2 tend également vers $+\infty$. Par conséquent, $3n^2 - 5$ tend vers $+\infty$. La suite diverge vers $+\infty$.

   Réponse (A).

2. Par définition, dans une suite notée (u_n), le terme qui suit le terme d'indice n (c'est-à-dire u_n) est le terme d'indice $n + 1$. Ce terme se note u_{n+1}.

   Réponse (B).

3. La suite est définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{(n+1)^2}$. Calculons les premiers termes pour observer son comportement : $u_0 = 2$

   $u_1 = \dfrac{u_0}{(0+1)^2} = \dfrac{2}{1^2} = 2$

   $u_2 = \dfrac{u_1}{(1+1)^2} = \dfrac{2}{2^2} = \dfrac{2}{4} = 0,5$

   On constate que $u_1 = u_0$ mais que $u_2 < u_1$. La suite n'est pas strictement monotone. Comme pour tout n, $u_{n+1} \leq u_n$ n'est pas toujours vrai, on ne peut pas conclure directement. Cependant, pour $n \geq 1$, $(n+1)^2 > 1$, donc $\dfrac{1}{(n+1)^2} < 1$, ce qui entraînera $u_{n+1} < u_n$. La suite est décroissante à partir du rang 1. La réponse la plus adaptée est "Décroissante".

   Réponse (A).

4. La fonction $f(x) = (x-1)^2$ est croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

   Une suite de la forme $u_n = f(n)$ aura les mêmes variations que la fonction f sur l'intervalle correspondant. La réponse (B) propose la suite $u_n = (n-1)^2$. Pour $n \geq 1$, n appartient bien à l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$. La suite (u_n) définie par $u_n = (n-1)^2$ est donc croissante à partir du rang 1.

   Réponse (B).

5. Sur le graphique, on lit les coordonnées des premiers points : $u_0 = 2$, $u_1 = 3$, $u_2 = 4$, $u_3 = 5$.

   On teste les expressions proposées :

   - (A) $u_0 = 2$. $u_1 = 1,5u_0 = 3$. Mais $u_2 = 1,5u_1 = 4,5 \neq 4$. Incorrect.
   - (B) $u_n = n + 2$. On vérifie : $u_0 = 0 + 2 = 2$, $u_1 = 1 + 2 = 3$, $u_2 = 2 + 2 = 4$. Correct.
   - (C) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 1$. On vérifie : $u_1 = u_0 + 1 = 3$, $u_2 = u_1 + 1 = 4$. Correct.
   - (D) $u_n = 1,5n$. $u_0 = 1,5 \times 0 = 0 \neq 2$. Incorrect.

   Les expressions (B) et (C) décrivent la même suite (une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 2). Les deux sont donc valides.

   Réponses (B) et (C) sont valides.

Exercice 2 : (8,5 points)

Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n), on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$. Si la suite est à termes strictement positifs, on peut aussi comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0,8^n$.

Les termes de la suite sont strictement positifs. On compare donc $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{0,8^{n+1}}{0,8^n} = 0,8^{n+1-n} = 0,8.$

Puisque $0,8 < 1$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$. Comme $u_n > 0$, cela implique $u_{n+1} < u_n$.

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est strictement décroissante.}}$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)^2 - n$.

On étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$. D'abord, exprimons u_{n+1} : $u_{n+1} = ((n+1)+1)^2 - (n+1) = (n+2)^2 - n - 1$.

Calculons la différence :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \left((n+2)^2 - n - 1\right) - \left((n+1)^2 - n\right) \\
&= (n^2 + 4n + 4 - n - 1) - (n^2 + 2n + 1 - n) \\
&= (n^2 + 3n + 3) - (n^2 + n + 1) \\
&= n^2 + 3n + 3 - n^2 - n - 1 \\
&= 2n + 2
\end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n, on a $n \geq 0$. Donc $2n \geq 0$, et $2n + 2 \geq 2$. La différence $u_{n+1} - u_n$ est donc strictement positive pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$

c. $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 5$.

La définition est par récurrence. Calculons $u_{n+1} - u_n$: $u_{n+1} - u_n = (u_n + 5) - u_n = 5$.

La différence est constante et vaut 5. Comme $5 > 0$, la suite est strictement croissante.

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$

d. $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + n^2 - 4$.

On étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n = n^2 - 4$. Le signe de cette différence dépend de la valeur de n.

- Pour $n = 0$: $u_1 - u_0 = 0^2 - 4 = -4 < 0$. La suite est décroissante entre u_0 et u_1.
- Pour $n = 1$: $u_2 - u_1 = 1^2 - 4 = -3 < 0$. La suite est décroissante entre u_1 et u_2.

- Pour $n = 2$: $u_3 - u_2 = 2^2 - 4 = 0$. On a $u_3 = u_2$.
- Pour $n > 2$: $n^2 > 4$, donc $n^2 - 4 > 0$. La suite est croissante à partir du rang 3.

Le signe de $u_{n+1} - u_n$ n'est pas constant pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ n'est ni croissante, ni décroissante.}}$

Exercice 3 : (7,5 points)

1. En 2010, il y a 2 000 abonnés. Chaque année, 80% des abonnés restent et 580 nouveaux arrivent.

   Estimation pour 2011 : Nombre d'abonnés = $(2000 \times 0,8) + 580 = 1600 + 580 = 2180$.

   Estimation pour 2012 : Nombre d'abonnés = $(2180 \times 0,8) + 580 = 1744 + 580 = 2324$.

   $\boxed{\text{On estime 2180 abonnés en 2011 et 2324 abonnés en 2012.}}$

2. u_n est le nombre d'abonnés l'année $(2010 + n)$. On a donc $u_0 = 2000$.

   a. **Justification de la relation de récurrence :**

   Soit u_n le nombre d'abonnés l'année $(2010 + n)$. L'année suivante, $(2010 + n + 1)$, le nombre d'abonnés u_{n+1} se compose de deux groupes :

   - Les anciens abonnés qui renouvellent : 20% ne renouvellent pas, donc 80% restent. Leur nombre est $0,8 \times u_n$.
   - Les nouveaux abonnés : leur nombre est fixe et vaut 580.

   En additionnant ces deux groupes, on obtient le nombre total d'abonnés pour l'année suivante. On a donc bien, pour tout entier naturel n : $\boxed{u_{n+1} = 0,8u_n + 580.}$

   b. **Algorithme complété :**

   L'algorithme doit initialiser u à $u_0 = 2000$ et n à 0. Puis, tant que u n'a pas dépassé 2800, on calcule le terme suivant et on augmente le compteur n de 1.

```
def seuil():
    n = 0
    u = 2000
    while u <= 2800:
        u = 0.8 * u + 580
        n = n + 1
    return n
```

c. **Détermination du seuil avec la calculatrice :**

On programme la suite sur la calculatrice et on affiche la table de valeurs : $u_0 = 2000$ | $u_6 \approx 2664,1$
$u_1 = 2180$ | $u_7 \approx 2711,3$
$u_2 = 2324$ | $u_8 \approx 2749,0$
$u_3 \approx 2439,2$ | $u_9 \approx 2779,2$
$u_4 \approx 2531,4$ | $u_{10} \approx 2803,4$
$u_5 \approx 2605,1$

On voit que $u_9 \leq 2800$ et $u_{10} > 2800$. $\boxed{\text{Le plus petit entier naturel } n \text{ tel que } u_n > 2800 \text{ est } n = 10.}$

Interprétation concrète : L'entier $n = 10$ correspond à l'année $2010+10 = 2020$. Cela signifie que c'est **au cours de l'année 2020** que le nombre d'abonnés à la revue dépassera 2800 pour la première fois.

d. **Conjectures à partir de la calculatrice :**

Conjecture sur les variations : En observant la table de valeurs, on voit que $u_0 < u_1 < u_2 < \ldots$. Chaque terme est supérieur au précédent. La suite (u_n) semble **strictement croissante**.

Conjecture sur la limite : Si on calcule des termes pour des rangs n de plus en plus grands : $u_{20} \approx 2888,5$; $u_{30} \approx 2898,6$; $u_{50} \approx 2899,98$. Les valeurs de u_n se rapprochent de plus en plus de 2900, sans jamais sembler le dépasser. La suite (u_n) semble **converger vers 2900**.

Interprétation concrète : Le modèle suggère que le nombre d'abonnés va continuer à augmenter chaque année, mais que cette augmentation sera de plus en plus faible. À très long terme, le nombre d'abonnés va se stabiliser aux alentours de 2900 personnes.