Exercice 1

1. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$.

   a. **Calcul des termes de la suite** (u_n)

   Pour $n = 0$: $u_0 = \dfrac{0+2}{0+1} = \dfrac{2}{1} = 2$.

   Pour $n = 1$: $u_1 = \dfrac{1+2}{1+1} = \dfrac{3}{2}$.

   Pour $n = 2$: $u_2 = \dfrac{2+2}{2+1} = \dfrac{4}{3}$.

   Pour $n = 99$: $u_{99} = \dfrac{99+2}{99+1} = \dfrac{101}{100}$.

   $\boxed{u_0 = 2, \quad u_1 = \dfrac{3}{2}, \quad u_2 = \dfrac{4}{3} \quad \text{et} \quad u_{99} = \dfrac{101}{100}}$

   b. **Sens de variation de la suite** (u_n)

   Pour étudier la monotonie de la suite (u_n), on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   L'expression de u_{n+1} est : $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)+2}{(n+1)+1} = \dfrac{n+3}{n+2}$.

   On calcule la différence :

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{n+3}{n+2} - \frac{n+2}{n+1} \\
&= \frac{(n+3)(n+1)}{(n+2)(n+1)} - \frac{(n+2)(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{(n^2+n+3n+3) - (n^2+4n+4)}{(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{n^2+4n+3-n^2-4n-4}{(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{-1}{(n+2)(n+1)}
\end{aligned}
$$

   Pour tout entier naturel n, on a $n+1 > 0$ et $n+2 > 0$. Le dénominateur $(n+2)(n+1)$ est donc strictement positif. Le numérateur est -1, qui est strictement négatif.

   Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n < 0$.

   $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{N}.}$

2. **Sens de variation de la suite** (v_n) **définie par** $v_n = 3^n \times n$

   Les premiers termes sont $v_0 = 3^0 \times 0 = 0$ et $v_1 = 3^1 \times 1 = 3$. Pour $n \geq 1$, les termes v_n sont strictement positifs. On peut donc comparer le quotient $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ à 1.

   Pour tout $n \geq 1$:

$$
\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3^{n+1} \times (n+1)}{3^n \times n} = \frac{3 \times 3^n \times (n+1)}{3^n \times n} = 3 \times \frac{n+1}{n}
$$

Or, pour tout $n \geq 1$, on a $n+1 > n$, donc $\dfrac{n+1}{n} > 1$. En multipliant par 3, on obtient $3 \times \dfrac{n+1}{n} > 3$, et donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} > 1$.

Comme $v_n > 0$ pour $n \geq 1$, on en déduit que $v_{n+1} > v_n$. La suite est donc strictement croissante à partir du rang 1. De plus, on a $v_1 > v_0$ $(3 > 0)$.

$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{N}.}$

3. On considère la suite (w_n) définie par $w_n = -n^2 + 6n$.

   a. **Monotonie de la suite** (w_n)

   On étudie le signe de la différence $w_{n+1} - w_n$.

   $w_{n+1} = -(n+1)^2 + 6(n+1) = -(n^2 + 2n + 1) + 6n + 6 = -n^2 + 4n + 5.$

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= (-n^2 + 4n + 5) - (-n^2 + 6n) \\ &= -n^2 + 4n + 5 + n^2 - 6n \\ &= -2n + 5 \end{aligned}$$

   Le signe de la différence dépend du signe de $-2n + 5$.

   - $-2n + 5 > 0 \iff 5 > 2n \iff n < 2,5$. Pour $n \in \{0, 1, 2\}$, la suite est croissante.
   - $-2n + 5 = 0 \iff n = 2,5$. Ce cas n'est pas possible pour n entier.
   - $-2n + 5 < 0 \iff 5 < 2n \iff n > 2,5$. Pour $n \geq 3$, la suite est strictement décroissante.

   $\boxed{\text{La suite } (w_n) \text{ est croissante jusqu'au rang 2, puis strictement décroissante à partir du rang 3.}}$

   b. **Conjecture sur la limite de la suite** (w_n)

   D'après la représentation graphique, on observe que lorsque n devient très grand, les points représentant les termes de la suite sont de plus en plus bas sur l'axe des ordonnées.

   $\boxed{\text{On peut conjecturer que la limite de la suite } (w_n) \text{ est } -\infty.}$

Exercice 2

Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = \dfrac{2v_n}{v_n^2+3}$.

1. **Calcul de v_1 et v_2**

   On calcule v_1 en remplaçant n par 0 dans la relation de récurrence :

   $$v_1 = \frac{2v_0}{v_0^2+3} = \frac{2\times 3}{3^2+3} = \frac{6}{9+3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

   On calcule v_2 en remplaçant n par 1 :

   $$v_2 = \frac{2v_1}{v_1^2+3} = \frac{2\times\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+3} = \frac{1}{\frac{1}{4}+3} = \frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{12}{4}} = \frac{1}{\frac{13}{4}} = \frac{4}{13}$$

   $\boxed{v_1 = \frac{1}{2} \text{ et } v_2 = \frac{4}{13}}$

2. **Valeurs approchées de v_{10} et v_{100}**

   En utilisant le mode suite de la calculatrice, on entre la relation de récurrence et on lit les valeurs dans la table :

   $\boxed{v_{10} \approx 0,103 \text{ et } v_{100} \approx 0,010}$

3. **Conjecture sur la limite de la suite (v_n)**

   On observe que les termes de la suite sont de plus en plus petits et semblent se rapprocher de zéro. Les valeurs de v_{10} et v_{100} confirment cette tendance.

   $\boxed{\text{On peut conjecturer que la limite de la suite } (v_n) \text{ est } 0.}$

Exercice 3

1. **Affichage de l'algorithme**

   La boucle `for i in range(0, N+1)` exécute les instructions qu'elle contient pour chaque entier `i` allant de 0 jusqu'à N. À chaque tour, l'algorithme calcule la valeur de $v = i^2 + 2i$ puis l'affiche.

   $\boxed{\text{Cet algorithme affiche, les uns en dessous des autres, les termes de rang 0 à N d'une suite.}}$

2. **Expression de la suite (v_n)**

   Le terme de rang n correspond à la valeur calculée par l'algorithme lorsque la variable de boucle `i` est égale à n. L'expression est donc donnée par le calcul effectué dans la boucle.

   $\boxed{\text{La suite affichée est définie par l'expression explicite } v_n = n^2 + 2n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

Exercice 4

Soit u_n le nombre d'allumettes à l'étape n, pour $n \geq 1$.

En comptant les allumettes sur les figures fournies, on obtient :

- Étape 1 : $u_1 = 3$.
- Étape 2 : $u_2 = 7$.
- Étape 3 : $u_3 = 11$.

On observe que l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant 4 : $u_2 = u_1 + 4$ et $u_3 = u_2 + 4$.

Pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on ajoute une nouvelle structure composée de 4 allumettes (deux pour le "toit", une pour la base et une pour la séparation verticale).

La suite (u_n) peut donc être modélisée par la relation de récurrence suivante : $\boxed{\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \quad \text{pour tout } n \geq 1 \end{cases}}$

Exercice 5

Soit u_n le nombre de cétacés au 1er janvier de l'année $2017 + n$, avec $u_0 = 3000$.

1. **Justification de $u_1 = 2930$**

   Le nombre de cétacés au début de 2017 est $u_0 = 3000$. Perdre 5 % de l'effectif revient à le multiplier par le coefficient multiplicateur $1 - \dfrac{5}{100} = 0,95$. On ajoute ensuite les 80 nouveaux cétacés. Le calcul pour l'année suivante est donc :

   $$u_1 = u_0 \times \left(1 - \frac{5}{100}\right) + 80 = 3000 \times 0,95 + 80 = 2850 + 80 = 2930$$

   $\boxed{\text{Le nombre de cétacés au début de l'année 2018 est bien } u_1 = 2930.}$

2. **Relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n**

   Le processus se répète chaque année. Pour passer de l'effectif u_n à l'effectif de l'année suivante u_{n+1}, on applique la même transformation : on multiplie par 0,95 et on ajoute 80.

   $\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n, \text{ la relation de récurrence est } u_{n+1} = 0,95 \times u_n + 80.}$

3. **Complétion de l'algorithme**

   La boucle `while` doit continuer tant que le nombre de cétacés u est supérieur ou égal à 2000. À chaque passage dans la boucle, on doit mettre à jour la valeur de u en utilisant la relation de récurrence, et incrémenter le compteur d'années n.

```
def seuil():
    n=0
    u=3000
    while u >= 2000 :
        u = 0.95 * u + 80
        n = n + 1
    return (n)
```

4. **Recherche de la valeur avec la calculatrice**

   On utilise le mode récurrence de la calculatrice pour calculer les termes successifs de la suite (u_n) jusqu'à ce que le terme devienne inférieur à 2000.

   En parcourant la table de valeurs, on trouve :

   ...
   - $u_{23} \approx 2014,1$
   - $u_{24} \approx 1993,4$

   Le premier rang n pour lequel u_n est strictement inférieur à 2000 est $n = 24$. Cela correspond à l'année $2017 + 24 = 2041$.

   $\boxed{\text{La valeur trouvée avec la calculatrice, et donc retournée par l'algorithme, est } n = 24.}$