## Correction de l'Exercice 1

1. *Note : L'énoncé indique "inéquation" pour $f(x) = 0$, ce qui est une coquille. Il s'agit de résoudre une équation.*

   On résout l'équation du second degré $4x^2 + 8x - 5 = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ :

$$\Delta = 8^2 - 4(4)(-5) = 64 + 80 = 144$$

   Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{144}}{2 \times 4} = \frac{-8 - 12}{8} = \frac{-20}{8} = -\frac{5}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{144}}{2 \times 4} = \frac{-8 + 12}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

   L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{5}{2} ; \frac{1}{2}\right\}}$.

2. On résout l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.

$$\begin{aligned} & 4x^2 + 8x - 5 \leq 6x^2 + 13x - 8 \\ \iff \quad & 0 \leq (6x^2 - 4x^2) + (13x - 8x) + (-8 + 5) \\ \iff \quad & 0 \leq 2x^2 + 5x - 3 \end{aligned}$$

   On étudie le signe du polynôme $P(x) = 2x^2 + 5x - 3$. On cherche ses racines : $\Delta = 5^2 - 4(2)(-3) = 25 + 24 = 49$. Les racines sont $x_1 = \frac{-5 - 7}{4} = -3$ et $x_2 = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{1}{2}$.

   Le polynôme $P(x)$ est du signe de $a = 2$ (positif) à l'extérieur de ses racines. On dresse le tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

   Nous cherchons les valeurs de $x$ pour lesquelles $P(x) \geq 0$. L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\mathcal{S} = ]-\infty ; -3] \cup \left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[}$.

3. **Interprétation graphique :**
   - Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ (soit $-\frac{5}{2}$ et $\frac{1}{2}$) sont les abscisses des points où la courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses.
   - La solution de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ est l'ensemble des abscisses des points pour lesquels la courbe $\mathcal{C}_f$ est située en dessous de la courbe $\mathcal{C}_g$ (ou la coupe).

## Correction de l'Exercice 2

La fonction $g(x) = 7x^2 + bx + 2$ n'admet pas de racine réelle si et seulement si son discriminant $\Delta$ est strictement négatif. Ici, $a = 7$, $b = b$ et $c = 2$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = b^2 - 4(7)(2) = b^2 - 56$$

On doit donc résoudre l'inéquation $\Delta < 0$.

$$\begin{aligned} & b^2 - 56 < 0 \\ \iff \quad & b^2 < 56 \\ \iff \quad & -\sqrt{56} < b < \sqrt{56} \end{aligned}$$

On simplifie la racine : $\sqrt{56} = \sqrt{4 \times 14} = 2\sqrt{14}$. Les valeurs de $b$ sont donc celles appartenant à l'intervalle $\boxed{]-2\sqrt{14}\,;\,2\sqrt{14}[}$.

## Correction de l'Exercice 3

1. Le point $P$ se déplace sur le segment $[AB]$ qui mesure 8 cm. La distance $AP = x$ peut donc varier de 0 (quand $P$ est en $A$) à 8 (quand $P$ est en $B$). De même pour le point $E$ sur $[AD]$. L'intervalle de définition pour $x$ est donc $\boxed{[0\,;\,8]}$.
2. L'aire de la surface grise, notée $\mathcal{A}(x)$, est la somme de l'aire du carré $AEHP$ et de l'aire du triangle $HDC$. Aire du carré $AEHP$ : $\mathcal{A}_{AEHP} = AP \times AE = x \times x = x^2$.

   Aire du triangle $HDC$ : la base est $DC = 8$ et la hauteur est $HD = AD - AH = 8 - AE = 8 - x$.
   $\mathcal{A}_{HDC} = \dfrac{DC \times HD}{2} = \dfrac{8 \times (8-x)}{2} = 4(8-x) = 32 - 4x$.
   L'aire totale est donc :

   $$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}_{AEHP} + \mathcal{A}_{HDC} = x^2 + (32 - 4x) = x^2 - 4x + 32$$

   Ce qui correspond bien à la formule de l'énoncé.
3. La surface du carré $ABCD$ est $\mathcal{A}_{ABCD} = 8^2 = 64$ cm$^2$. 75 % de cette surface vaut $0,75 \times 64 = 48$ cm$^2$. On cherche $x \in [0\,;\,8]$ tel que $\mathcal{A}(x) = 48$.

   $$\begin{aligned} & x^2 - 4x + 32 = 48 \\ \iff \quad & x^2 - 4x - 16 = 0 \end{aligned}$$

   On calcule le discriminant : $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(-16) = 16 + 64 = 80$. Les solutions sont : $x_1 = \dfrac{4 - \sqrt{80}}{2} = \dfrac{4 - 4\sqrt{5}}{2} = 2 - 2\sqrt{5} \approx -2,47$. $x_2 = \dfrac{4 + \sqrt{80}}{2} = \dfrac{4 + 4\sqrt{5}}{2} = 2 + 2\sqrt{5} \approx 6,47$.
   La solution $x_1$ est négative, elle n'appartient donc pas à l'intervalle $[0\,;\,8]$. On la rejette. La solution $x_2$ appartient bien à $[0\,;\,8]$.

   Il faut donc placer le point $P$ tel que $\boxed{AP = (2 + 2\sqrt{5})\text{ cm}}$.

4. Le quart de l'aire du carré $ABCD$ est $\frac{1}{4} \times 64 = 16$ cm$^2$. On cherche s'il existe $x \in [0\,;\,8]$ tel que $\mathcal{A}(x) \leq 16$.

$$\begin{aligned} & x^2 - 4x + 32 \leq 16 \\ \iff \quad & x^2 - 4x + 16 \leq 0 \end{aligned}$$

On étudie le signe du polynôme $Q(x) = x^2 - 4x + 16$. $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(16) = 16 - 64 = -48$.

Le discriminant est strictement négatif et le coefficient $a = 1$ est positif. Le polynôme $Q(x)$ est donc toujours strictement positif pour tout réel $x$. L'inéquation $Q(x) \leq 0$ n'a donc aucune solution.

Conclusion : $\boxed{\text{Il n'est pas possible que l'aire grise soit inférieure ou égale au quart de l'aire du carré}}$.

## Correction de l'Exercice 4

1. a) **Développer $f(x)$.**

$$\begin{aligned} f(x) &= -0,2(x-11)(x+7) \\ &= -0,2(x^2 + 7x - 11x - 77) \\ &= -0,2(x^2 - 4x - 77) \\ &= \boxed{-0,2x^2 + 0,8x + 15,4} \end{aligned}$$

b) **Montrer que $f(x) = -0.2(x-2)^2 + 16,2$.** On part de la forme canonique et on la développe :

$$\begin{aligned} -0.2(x-2)^2 + 16,2 &= -0.2(x^2 - 4x + 4) + 16,2 \\ &= -0.2x^2 + 0.8x - 0.8 + 16,2 \\ &= -0.2x^2 + 0.8x + 15,4 \end{aligned}$$

On retrouve bien la forme développée de $f(x)$. L'égalité est démontrée.

2. a) Pour calculer $f(2)$, la forme canonique est la plus appropriée : $f(2) = -0.2(2-2)^2 + 16,2 = 0 + 16,2 = \boxed{16,2}$.

b) Pour calculer $f(0)$, la forme développée est la plus directe : $f(0) = -0,2(0)^2 + 0,8(0) + 15,4 = \boxed{15,4}$.

c) Pour résoudre $f(x) \geq 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$, on utilise la forme factorisée $f(x) = -0,2(x-11)(x+7)$. Les racines sont $-7$ et $11$. Le coefficient $a = -0,2$ est négatif, donc la parabole est tournée vers le bas. $f(x)$ est positive entre ses racines, sur $[-7\,;\,11]$. On cherche les solutions dans $[0\,;\,+\infty[$. L'intersection est $[0\,;\,11]$. L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} = [0\,;\,11]}$.

d) Pour montrer que $f(x) \leq 16,2$, la forme canonique est idéale. Pour tout réel $x$, on a $(x-2)^2 \geq 0$. En multipliant par $-0,2$ (négatif), on inverse l'inégalité : $-0.2(x-2)^2 \leq 0$. En ajoutant 16,2 : $-0.2(x-2)^2 + 16,2 \leq 16,2$, soit $f(x) \leq 16,2$.

3. a) La hauteur de la falaise est la hauteur au départ, pour $x = 0$. C'est $f(0) = 15,4$. La hauteur de la falaise est de $\boxed{15,4 \text{ mètres}}$.

b) Le plongeur rentre dans l'eau quand sa hauteur est nulle, soit $f(x) = 0$. On cherche la solution positive. D'après la question 2.c), c'est $x = 11$. Le plongeur rentre dans l'eau à

$\boxed{11 \text{ mètres}}$ du pied de la falaise.

c) La hauteur maximale est la valeur maximale de la fonction $f$. D'après la forme canonique, le sommet de la parabole est atteint en $x = 2$ et vaut $f(2) = 16,2$. La hauteur maximale atteinte est de $\boxed{16,2 \text{ mètres}}$.

## Correction de l'Exercice 5

Soit $p(x) = ax^2 + 15x + c$. On connaît ses deux racines $x_1 = \frac{4}{3}$ et $x_2 = -\frac{1}{2}$. On utilise les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme du second degré. La somme des racines est $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$. Le produit des racines est $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Ici, on a $b = 15$.

Calculons la somme $S$ :

$$S = \frac{4}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{6} - \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

On en déduit $a$ :

$$S = -\frac{15}{a} \iff \frac{5}{6} = -\frac{15}{a} \iff 5a = -15 \times 6 \iff 5a = -90 \iff a = -18$$

Calculons le produit $P$ :

$$P = \frac{4}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

On en déduit $c$ en utilisant la valeur de $a$ trouvée :

$$P = \frac{c}{a} \iff -\frac{2}{3} = \frac{c}{-18} \iff c = -\frac{2}{3} \times (-18) \iff c = \frac{36}{3} \iff c = 12$$

Les deux réels sont donc $\boxed{a = -18 \text{ et } c = 12}$.