Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$$

On note C_f sa courbe représentative et Δ la droite d'équation $y = x - 1$.

1. Limites aux bornes de D et interprétation graphique

L'ensemble de définition est $D =]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$. Les bornes sont $-\infty$, -2 (par valeurs inférieures et supérieures), et $+\infty$.

Limite en $\pm\infty$: $f(x)$ est une fonction rationnelle. Pour traiter la forme indéterminée de quotient de polynômes, on **factorise par le plus haut degré** :

$$f(x) = \frac{x^2\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1 + \frac{2}{x}\right)} = x\,\frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}}.$$

Ainsi, lorsque $x \to \pm\infty$, les termes en $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x^2}$ s'annulent :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Limite en -2 : Étudions la limite du numérateur et du dénominateur lorsque x tend vers -2.

- Numérateur : $\lim_{x\to-2}(x^2 + x - 1) = (-2)^2 + (-2) - 1 = 4 - 2 - 1 = 1$.
- Dénominateur : $\lim_{x\to-2}(x + 2) = 0$.

Le numérateur tend vers 1 (positif) et le dénominateur tend vers 0. Il faut étudier le signe du dénominateur $x + 2$:

- Si $x > -2$, alors $x + 2 > 0$. Donc $\lim_{x\to-2^+}(x + 2) = 0^+$.
- Si $x < -2$, alors $x + 2 < 0$. Donc $\lim_{x\to-2^-}(x + 2) = 0^-$.

Par quotient des limites :

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Interprétation graphique : Comme $\lim_{x\to-2} f(x) = \pm\infty$, on en déduit que la droite d'équation $\boldsymbol{x = -2}$ est une **asymptote verticale** à la courbe C_f.

2. Décomposition de $f(x)$

On cherche trois réels a, b, c tels que pour tout $x \in D$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$$

Mettons l'expression de droite au même dénominateur :

$$ax + b + \frac{c}{x+2} = \frac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2} = \frac{ax^2+2ax+bx+2b+c}{x+2} = \frac{ax^2+(2a+b)x+(2b+c)}{x+2}$$

On identifie les coefficients de ce numérateur avec ceux de $f(x) = \frac{1x^2+1x-1}{x+2}$:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 1 \\ 2b + c = -1 \end{cases}$$

Résolvons ce système :

- $a = 1$.
- $2(1) + b = 1 \implies 2 + b = 1 \implies b = 1 - 2 = -1$.
- $2(-1) + c = -1 \implies -2 + c = -1 \implies c = -1 + 2 = 1$.

Donc, on a bien trouvé $a = 1$, $b = -1$ et $c = 1$. Pour tout $x \in D$:

$$\boxed{f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+2}}$$

3. Étude de $f(x) - (x-1)$ et interprétation graphique

Calculons la différence $f(x) - (x-1)$ en utilisant la forme décomposée :

$$f(x) - (x-1) = \left(x - 1 + \frac{1}{x+2}\right) - (x-1) = \frac{1}{x+2}$$

Étudions la limite de cette différence en $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+2} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x+2} = 0$$

Interprétation graphique : Comme $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - (x-1)] = 0$, on en déduit que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est une **asymptote oblique** à la courbe C_f en $+\infty$ et en $-\infty$.

4. Tableau de variation de f

Pour étudier les variations de f, calculons sa dérivée $f'(x)$. Il est plus simple d'utiliser la forme décomposée $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+2}$.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(1) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+2}\right)$$

Rappelons que la dérivée de $\frac{1}{u}$ est $-\frac{u'}{u^2}$. Ici $u(x) = x + 2$, donc $u'(x) = 1$.

$$f'(x) = 1 - 0 + \left(-\frac{1}{(x+2)^2}\right) = 1 - \frac{1}{(x+2)^2}$$

Mettons $f'(x)$ au même dénominateur pour étudier son signe :

$$f'(x) = \frac{(x+2)^2 - 1}{(x+2)^2} = \frac{(x^2 + 4x + 4) - 1}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2}$$

Le signe de $f'(x)$ dépend du signe du numérateur $N(x) = x^2 + 4x + 3$, car le dénominateur $(x+2)^2$ est strictement positif sur D. Cherchons les racines de $N(x) = x^2 + 4x + 3 = 0$. Le discriminant est $\Delta_N = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(1)(3) = 16 - 12 = 4 = 2^2$. Les racines sont :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta_N}}{2a} = \frac{-4 - 2}{2(1)} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta_N}}{2a} = \frac{-4 + 2}{2(1)} = \frac{-2}{2} = -1$$

Le trinôme $x^2 + 4x + 3$ est positif à l'extérieur de ses racines (pour $x < -3$ ou $x > -1$) et négatif entre ses racines (pour $-3 < x < -1$).

Calculons les valeurs de f aux points où la dérivée s'annule (extremums locaux) :

- $f(-3) = -3 - 1 + \frac{1}{-3+2} = -4 + \frac{1}{-1} = -4 - 1 = -5$.
- $f(-1) = -1 - 1 + \frac{1}{-1+2} = -2 + \frac{1}{1} = -2 + 1 = -1$.

Dressons le tableau de variation complet :

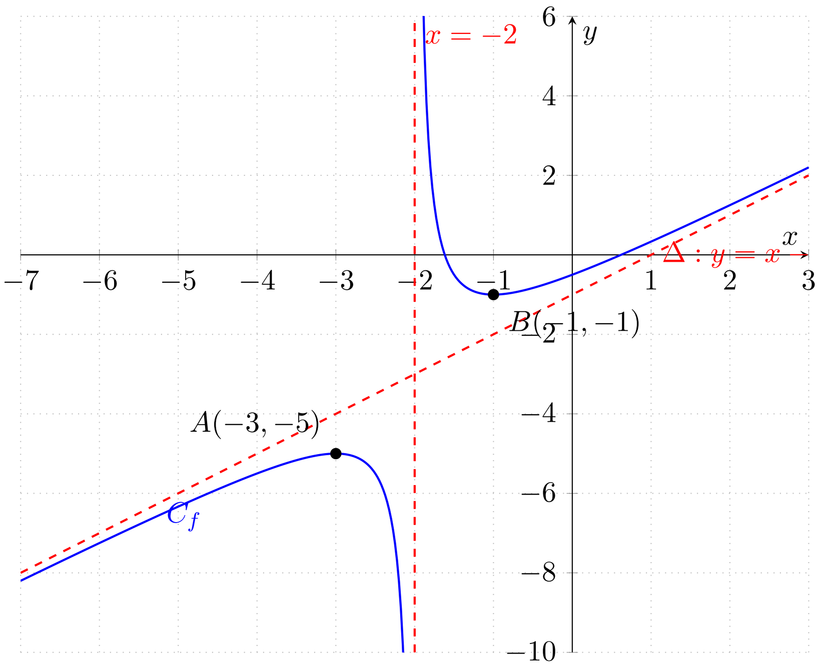
x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	‖	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

f admet un maximum local en $x = -3$ valant $f(-3) = -5$, et un minimum local en $x = -1$ valant $f(-1) = -1$.

5. Allure de la courbe C_f

On trace la courbe C_f dans un repère en utilisant les informations précédentes :

- Asymptote verticale $x = -2$.
- Asymptote oblique $\Delta : y = x - 1$.
- Maximum local au point $A(-3, -5)$.
- Minimum local au point $B(-1, -1)$.
- Comportement suivant les variations du tableau.



Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$. La courbe C_f et un tableau de variation (partiel) sont donnés.

1. Détermination de a, b et c

Nous utilisons les informations graphiques :

- Le point $B(0, 1)$ appartient à C_f. Cela signifie que $\boldsymbol{f(0) = 1}$.
- Le point $C(-1, 0)$ appartient à C_f. Cela signifie que $\boldsymbol{f(-1) = 0}$.
- La courbe C_f admet une tangente horizontale au point C d'abscisse $x = -1$ (la courbe "touche" l'axe des abscisses sans le traverser à ce point, ce qui est confirmé par $f'(-1) = 0$ dans le tableau). Cela signifie que $\boldsymbol{f'(-1) = 0}$.

Traduisons ces informations en équations :

- $f(0) = (a(0)^2 + b(0) + c)e^{-0} = c \times 1 = c$. Donc, $\boldsymbol{c = 1}$.
- $f(-1) = (a(-1)^2 + b(-1) + c)e^{-(-1)} = (a - b + c)e^1$. Comme $f(-1) = 0$ et $e^1 \neq 0$, on doit avoir $a - b + c = 0$.
- Calculons la dérivée $f'(x)$. On utilise la règle de dérivation d'un produit $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u(x) = ax^2 + bx + c$ (donc $u'(x) = 2ax + b$) et $v(x) = e^{-x}$ (donc $v'(x) = -e^{-x}$).

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2ax + b)e^{-x} + (ax^2 + bx + c)(-e^{-x}) \\ &= e^{-x}\left[(2ax + b) - (ax^2 + bx + c)\right] \\ &= e^{-x}\left[-ax^2 + (2a - b)x + (b - c)\right] \end{aligned}$$

La condition $f'(-1) = 0$ donne :

$$e^{-(-1)}\left[-a(-1)^2 + (2a - b)(-1) + (b - c)\right] = 0$$

$$e^1\left[-a - (2a - b) + (b - c)\right] = 0$$

Comme $e \neq 0$, il faut que :

$$-a - 2a + b + b - c = 0 \implies -3a + 2b - c = 0$$

Nous avons le système suivant :

$$\begin{cases} c = 1 & (1) \\ a - b + c = 0 & (2) \\ -3a + 2b - c = 0 & (3) \end{cases}$$

En utilisant (1) dans (2) : $a - b + 1 = 0 \implies \boldsymbol{b = a + 1}$. En utilisant (1) et $b = a + 1$ dans (3) :

$$-3a + 2(a + 1) - 1 = 0$$

$$-3a + 2a + 2 - 1 = 0$$

$$-a + 1 = 0 \implies \boldsymbol{a = 1}$$

En retournant à l'expression de b : $b = a + 1 = 1 + 1 = \mathbf{2}$.

Les coefficients sont donc $a = 1$, $b = 2$ et $c = 1$. La fonction est :

$$\boxed{f(x) = (x^2 + 2x + 1)e^{-x} = (x + 1)^2 e^{-x}}$$

2. Complétion du tableau de variation

Il faut déterminer le signe de $f'(x)$ et les limites de $f(x)$ aux bornes du domaine $\mathbb{R}$.

Signe de $f'(x)$: Avec $a = 1, b = 2, c = 1$, l'expression de la dérivée devient :

$$f'(x) = e^{-x}\left[-(1)x^2 + (2(1) - 2)x + (2 - 1)\right] = e^{-x}[-x^2 + 1] = \boldsymbol{e^{-x}(1 - x^2)}$$

Comme $e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$. Ce polynôme du second degré s'annule en $x = 1$ et $x = -1$. Il est positif entre ses racines (sur $]-1, 1[$) et négatif à l'extérieur (sur $]-\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$).

Limites :

- En $+\infty$: $f(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$. C'est une forme indéterminée du type $\infty \times 0$. On utilise les croissances comparées : l'exponentielle e^x l'emporte sur tout polynôme en $+\infty$, donc e^{-x} l'emporte sur $(x + 1)^2$ en tendant vers 0.
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
- En $-\infty$: Posons $X = -x$. Si $x \to -\infty$, alors $X \to +\infty$.
$$f(x) = (x + 1)^2 e^{-x} = (-X + 1)^2 e^X = (X - 1)^2 e^X$$
Lorsque $X \to +\infty$, $(X - 1)^2 \to +\infty$ et $e^X \to +\infty$.
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{X\to+\infty} (X - 1)^2 e^X = +\infty$$

Valeurs aux points critiques :

- $f(-1) = (-1 + 1)^2 e^{-(-1)} = 0^2 \times e^1 = 0$.
- $f(1) = (1 + 1)^2 e^{-1} = 2^2 e^{-1} = 4e^{-1} = \frac{4}{e}$.

Tableau de variation complet :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0

3. Position relative de C_f et de sa tangente en $x = 0$ (Point B)

a. Équation de la tangente T_B en $x = 0$

L'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse $x_0 = 0$ est $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

- $f(0) = 1$ (d'après Q1).
- $f'(0) = e^{-0}(1 - 0^2) = 1 \times 1 = 1$.

L'équation de la tangente T_B est donc $y = 1(x) + 1$, soit $\boldsymbol{y = x + 1}$.

b. Justification de l'étude du signe de $(x + 1)\phi(x)$

Étudier la position relative de C_f par rapport à sa tangente T_B revient à étudier le signe de la différence $d(x) = f(x) - y_{T_B}$.

$$d(x) = f(x) - (x + 1)$$

En utilisant l'expression $f(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$:

$$d(x) = (x + 1)^2 e^{-x} - (x + 1)$$

Factorisons par $(x + 1)$:

$$d(x) = (x + 1)\left[(x + 1)e^{-x} - 1\right]$$

En posant $\phi(x) = (x + 1)e^{-x} - 1$, on a bien :

$$d(x) = (x + 1)\phi(x)$$

Le problème revient donc bien à déterminer le signe de $(x + 1)\phi(x)$.

c. Étude du signe de $\phi(x)$ et conclusion

Étudions la fonction $\phi(x) = (x + 1)e^{-x} - 1$ sur $\mathbb{R}$. Calculons sa dérivée $\phi'(x)$:

$$\phi'(x) = \frac{d}{dx}(x + 1) \times e^{-x} + (x + 1) \times \frac{d}{dx}(e^{-x}) - \frac{d}{dx}(1)$$

$$\phi'(x) = 1 \times e^{-x} + (x + 1) \times (-e^{-x}) - 0$$

$$\phi'(x) = e^{-x} - (x + 1)e^{-x} = e^{-x}(1 - (x + 1)) = e^{-x}(-x) = -xe^{-x}$$

Le signe de $\phi'(x)$ dépend de celui de $-x$, car $e^{-x} > 0$.

- Si $x < 0$, $-x > 0$, donc $\phi'(x) > 0$: ϕ est croissante.
- Si $x > 0$, $-x < 0$, donc $\phi'(x) < 0$: ϕ est décroissante.
- Si $x = 0$, $\phi'(x) = 0$.

La fonction ϕ admet donc un maximum global en $x = 0$. Calculons ce maximum : $\phi(0) = (0+1)e^{-0} - 1 = 1 \times 1 - 1 = 0$. Comme le maximum de $\phi(x)$ est 0, atteint uniquement en $x = 0$, on en déduit que :

- $\boldsymbol{\phi(x) < 0}$ pour tout $x \neq 0$.
- $\boldsymbol{\phi(0) = 0}$.

Dressons maintenant le tableau de signe de $d(x) = (x+1)\phi(x)$:

x	$-\infty$	-1		0	
Signe de $(x+1)$	$-$	0	$+$		
Signe de $\phi(x)$	$-$		$-$	0	
Signe de $d(x)$	$+$	0	$-$	0	
Position de C_f / T_B	C_f au-dessus	Point commun	C_f en dessous	Point commun (tangence)	C_f

Conclusion :

- Sur $]-\infty, -1[$, $d(x) > 0$, donc $\boldsymbol{C_f}$ est au-dessus de la tangente T_B.
- Sur $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, $d(x) < 0$, donc $\boldsymbol{C_f}$ est en dessous de la tangente T_B.
- En $x = -1$ et $x = 0$, $d(x) = 0$, les courbes se croisent. Le point $B(0, 1)$ est un point de tangence.