Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$$

On note C_f la représentation graphique de f. La droite d'équation $y = x - 1$ est notée Δ.

1. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Que peut-on en déduire pour C_f ?
2. Démontrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in D$,

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}$$

3. Étudier la limite de $f(x) - (x - 1)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$. Que peut-on en déduire graphiquement ?
4. Dresser le tableau de variation de f sur D.
5. Tracer l'allure de la courbe représentative C_f dans un repère du plan.

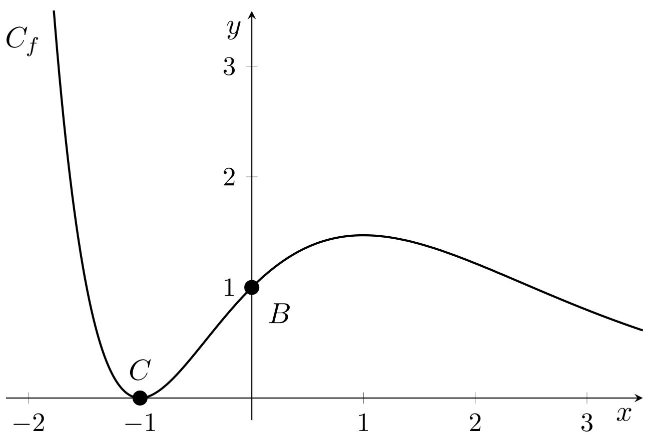
Exercice 2

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$$

où a, b et c sont trois réels à déterminer.

Voici la courbe représentative C_f :



ainsi que le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1			$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0			
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	$\searrow$	

1. À l'aide des renseignements portés sur la figure (voir annexe), déterminer les nombres a, b et c.
2. Compléter le tableau de variation en justifiant vos réponses.
3. On souhaite étudier la position relative de la courbe C_f et de la tangente T en $x = -1$ à C_f.
   (a) Donner l'équation de T.
   (b) Justifier que ce problème revient à déterminer le signe de $(x+1)\phi(x)$
   où $\phi(x) = (x+1)e^{-x} - 1$.
   (c) Étudier le signe de $\phi(x)$ et conclure.