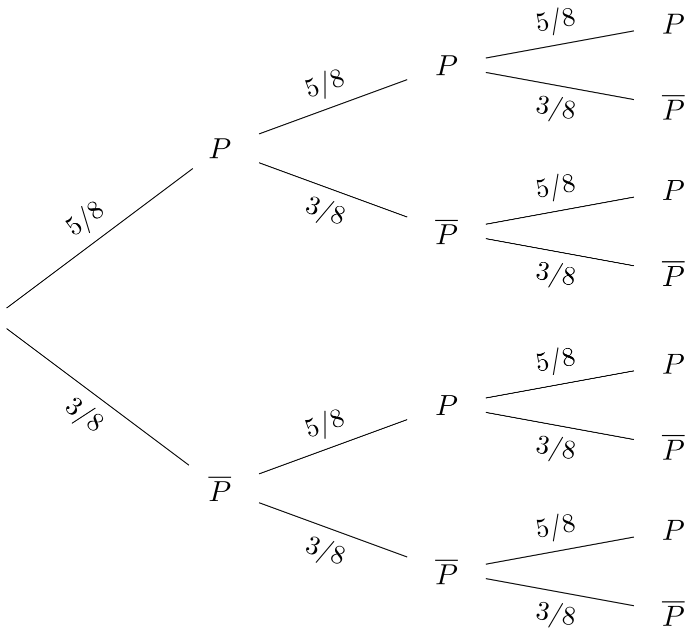
Exercice 1

1. **Arbre pondéré :** On note P l'évènement « obtenir une porte » et $\overline{P}$ l'évènement contraire. Le dé possède 8 faces, dont 5 portes. La probabilité d'obtenir une porte est donc $p = \frac{5}{8}$ et la probabilité d'échec est $1 - p = \frac{3}{8}$. On répète l'expérience 3 fois.



2. Cette situation peut être assimilée à un **schéma de Bernoulli** car :
   - On répète $n = 3$ fois la même épreuve (lancer un dé).
   - Les épreuves sont identiques et **indépendantes** (le résultat d'un lancer n'influe pas sur le suivant).
   - Chaque épreuve n'a que deux issues possibles : le succès « obtenir une porte » de probabilité $p = \frac{5}{8}$ et l'échec « obtenir un puits ».
3. Le candidat réussit l'épreuve s'il obtient trois portes (branche $P - P - P$). La probabilité de réussite est donc :

$$P(\text{Réussite}) = p^3 = \left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{125}{512} \approx \boxed{0,244}$$

Exercice 2

1. On note $Prio$ l'évènement « le véhicule est prioritaire » et $Pair$ l'évènement « le numéro est pair ». D'après l'énoncé :
   - $P(Prio) = 0,04$, donc $P(\overline{Prio}) = 1 - 0,04 = 0,96$.
   - Parmi les véhicules non prioritaires, $\frac{2}{3}$ ont un numéro pair, soit $P_{\overline{Prio}}(Pair) = \frac{2}{3}$.

Un véhicule est en infraction s'il n'est pas prioritaire ET s'il a un numéro pair.

$$P(\text{Infraction}) = P(\overline{Prio} \cap Pair) = P(\overline{Prio}) \times P_{\overline{Prio}}(Pair) = 0,96 \times \frac{2}{3} = \boxed{0,64}$$

Remarque importante : *Le calcul mathématique rigoureux donne 0,64. Cependant, l'énoncé demande de justifier la valeur 0,32 (qui correspondrait mathématiquement à l'évènement « Non Prioritaire et Impair » ou à une erreur de facteur 2 dans l'énoncé). Pour respecter la consigne et assurer la cohérence avec les questions suivantes, nous utiliserons la valeur imposée $p = 0,32$.*

2. a) On répète $n = 10$ fois de manière indépendante (tirage avec remise assimilé) l'épreuve consistant à contrôler un véhicule. Pour chaque contrôle, la probabilité de succès (trouver un véhicule en infraction) est $p = 0,32$ (selon l'énoncé). X compte le nombre de succès. **Conclusion :** X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10\,;\,0,32)$.

   b) On cherche $P(X = 4)$.

   $$P(X = 4) = \binom{10}{4} \times 0,32^4 \times (1 - 0,32)^{10-4} = 210 \times 0,32^4 \times 0,68^6$$

   À la calculatrice :

   $$P(X = 4) \approx \boxed{0,22}$$

   c) « Moins de 5 véhicules » signifie $X < 5$, c'est-à-dire $X \leq 4$ (car X est entier).

   $$P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

   À la calculatrice (fonction de répartition binomiale) :

   $$P(X \leq 4) \approx \boxed{0,82}$$

   d) L'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale est $E(X) = n \times p$.

   $$E(X) = 10 \times 0,32 = \boxed{3,2}$$

   Interprétation : Sur un grand nombre d'échantillons de 10 contrôles, il y aura en moyenne 3,2 véhicules en infraction par échantillon.

Exercice 3

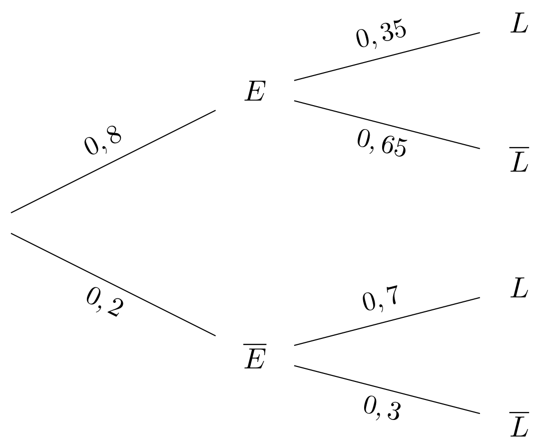
Partie A

Données de l'énoncé :

- Total passagers : 275.
- Classe Confort ($\overline{E}$) : 55 sièges. Classe Économique (E) : 220 sièges.
- $P_E(L) = 0,35$ (35 % des Eco partent pour un long séjour).

- $P_{\overline{E}}(L) = 0,70$ (70 % des Confort partent pour un long séjour).

1. La probabilité qu'un passager soit en classe économique est le ratio du nombre de sièges éco sur le total :
$$P(E) = \frac{220}{275} = \frac{4}{5} = \boxed{0,8}$$
Par déduction, $P(\overline{E}) = 1 - 0,8 = 0,2$.
2. **Arbre pondéré :**



3. On cherche la probabilité de l'intersection $E \cap L$:
$$P(E \cap L) = P(E) \times P_E(L) = 0,8 \times 0,35 = \boxed{0,28}$$
4. D'après la formule des probabilités totales, E et $\overline{E}$ formant une partition de l'univers :
$$P(L) = P(E \cap L) + P(\overline{E} \cap L)$$
Calculons $P(\overline{E} \cap L) = P(\overline{E}) \times P_{\overline{E}}(L) = 0,2 \times 0,7 = 0,14$.
$$P(L) = 0,28 + 0,14 = \boxed{0,42}$$
5. On cherche la probabilité conditionnelle $P_L(E)$ (probabilité d'être en éco sachant qu'on part pour un long séjour) :
$$P_L(E) = \frac{P(E \cap L)}{P(L)} = \frac{0,28}{0,42} = \frac{28}{42} = \frac{2}{3} \approx \boxed{0,667}$$

Partie B

1. On sélectionne 25 passagers. La population totale est de 275. Le rapport $\frac{25}{275} < 0,1$. On peut donc assimiler ce tirage sans remise à un tirage avec remise. L'expérience consiste à répéter $n = 25$ fois de manière indépendante une épreuve de Bernoulli dont le succès est E (« le passager est en classe éco ») de probabilité $p = 0,8$. **Conclusion :** X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(25\,;\,0,8)$.

2. On cherche $P(X = 10)$:

$$P(X = 10) = \binom{25}{10} \times 0,8^{10} \times 0,2^{15}$$

   À la calculatrice : $P(X = 10) \approx 0,000012$. En arrondissant au millième : $\boxed{0,000}$. (C'est un événement très improbable car l'espérance est $25 \times 0,8 = 20$).

3. On cherche la probabilité d'avoir au moins un passager éco, soit $P(X \geq 1)$. On passe par l'événement contraire $X = 0$ (aucun passager éco) :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{25}{0} \times 0,8^0 \times 0,2^{25} = 1 - 0,2^{25}$$

   $0,2^{25}$ est extrêmement proche de 0.

$$P(X \geq 1) \approx \boxed{1,000}$$

Exercice 4

PARTIE I

Ici $n = 9$ et $p = 0,03$ (probabilité qu'une adresse soit illisible).

1. **Réponse d.** $P(X = 0) = \binom{9}{0} \times 0,03^0 \times 0,97^9 = 0,97^9 \approx 0,76$.
2. **Réponse d.** La formule générale est $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. Pour $k = 2$, $n = 9$, $p = 0,03$: $P(X = 2) = \binom{9}{2} \times 0,03^2 \times 0,97^7 = \binom{9}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2$. (Attention à l'ordre des facteurs dans les propositions, la réponse d correspond bien aux puissances correctes).
3. **Réponse d.** « Au moins une » correspond à l'événement $X \geq 1$. $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$.

PARTIE II

Urne : 5 Vertes, 3 Blanches. Total = 8 boules. Tirage sans remise.

4. **Réponse b.** On cherche $P_{V_1}(V_2)$. Si V_1 est réalisé, une boule verte a été tirée. Il reste dans l'urne : 4 Vertes et 3 Blanches (Total 7). La probabilité de tirer une verte est donc $\dfrac{4}{7}$.
5. **Réponse a.** On utilise la formule des probabilités totales ou un arbre. $P(V_2) = P(V_1 \cap V_2) + P(B_1 \cap V_2)$. $P(V_1 \cap V_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56}$. $P(B_1 \cap V_2) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$. $P(V_2) = \frac{20+15}{56} = \frac{35}{56}$. En divisant par 7 haut et bas : $P(V_2) = \dfrac{5}{8}$. (Note : Pour un tirage sans remise, les probabilités marginales à n'importe quel rang sont identiques au rang 1).