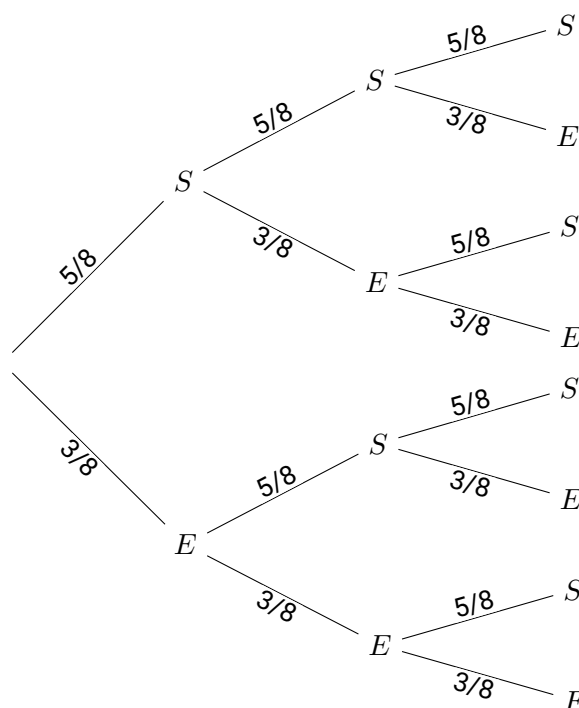


Exercice 1 - Corrigé

On lance 3 fois un dé à 8 faces. Succès S : "Obtenir une porte" (5 faces), Échec E : "Obtenir un puits" (3 faces). $P(S) = \frac{5}{8}$, $P(E) = \frac{3}{8}$. On veut obtenir 3 portes, soit l'événement SSS .

- Arbre pondéré** : L'arbre aurait 3 niveaux, chaque niveau représentant un lancer. À chaque nœud, deux branches partent : S (avec probabilité $5/8$) et E (avec probabilité $3/8$).

Un arbre dessiné :



- Schéma de Bernoulli** : On répète $n = 3$ fois la même épreuve de Bernoulli (lancer le dé) de manière identique et indépendante. Chaque épreuve a deux issues possibles :

- Succès (S) : "Obtenir une porte", avec une probabilité constante $p = P(S) = \frac{5}{8}$.
- Échec (E) : "Obtenir un puits", avec une probabilité constante $1 - p = P(E) = \frac{3}{8}$.

Cette situation correspond donc bien à un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 5/8$.

- Probabilité de réussir l'épreuve (obtenir 3 portes)** : On cherche la probabilité de l'événement SSS (Succès au 1er ET Succès au 2e ET Succès au 3e lancer). Comme les lancers sont indépendants : $P(SSS) = P(S) \times P(S) \times P(S) = p \times p \times p = p^3$.

$$P(\text{Réussir}) = \left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{5^3}{8^3} = \frac{125}{512}$$

La probabilité que le candidat réussisse est $\frac{125}{512} \approx 0,244$.

Exercice 2 - Corrigé

Soit P l'événement "le véhicule est prioritaire" et N l'événement "le véhicule porte un numéro pair". On a $P(P) = 0,04$, donc $P(\overline{P}) = 1 - 0,04 = 0,96$. On sait que parmi les non prioritaires ($\overline{P}$), $\frac{2}{3}$ portent un numéro pair. Donc $P_{\overline{P}}(N) = \frac{2}{3}$. Un véhicule est en infraction (I) s'il n'est pas prioritaire ($\overline{P}$) ET qu'il porte un numéro pair (N).

1. **Probabilité d'être en infraction** : L'énoncé stipule $P(I) = 0,32$. Note : Selon les données initiales, $P(I) = P(\overline{P} \cap N) = P(\overline{P}) \times P_{\overline{P}}(N) = 0,96 \times \frac{2}{3} = 0,64$. Il y a une incohérence dans l'énoncé. Nous utiliserons la valeur imposée $P(I) = 0,32$ pour la suite. Justification (basée sur la valeur imposée) : L'énoncé nous donne directement $P(I) = 0,32$.
2. On effectue $n = 10$ contrôles indépendants. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de véhicules en infraction.

a) **Loi de X** : On répète $n = 10$ fois la même épreuve de Bernoulli (contrôler un véhicule) de manière identique et indépendante. Chaque épreuve a deux issues :

- Succès : "Le véhicule est en infraction", avec $p = P(I) = 0,32$.
- Échec : "Le véhicule n'est pas en infraction", avec $1 - p = 1 - 0,32 = 0,68$.

La variable aléatoire X , qui compte le nombre de succès, suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,32$. On note $X \sim \mathcal{B}(10; 0,32)$.

b) **Probabilité d'exactly 4 infractions** : On cherche $P(X = 4)$. D'après la formule de la loi binomiale :

$$P(X = 4) = \binom{10}{4} (0,32)^4 (1 - 0,32)^{10-4} = \binom{10}{4} (0,32)^4 (0,68)^6$$

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 10 \times 3 \times 7 = 210.$$

$$P(X = 4) = 210 \times (0,32)^4 \times (0,68)^6 \approx 210 \times 0,01048576 \times 0,098855 \approx 0,2178$$

Arrondi au centième : $P(X = 4) \approx 0,22$.

c) **Probabilité de moins de 5 infractions** : "Moins de 5" signifie $X < 5$, soit $X \leq 4$. On cherche $P(X \leq 4)$. $P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$. On utilise la calculatrice (fonction 'binomcdf' ou 'BinomialCD') : $P(X \leq 4) \approx 0,8109$. Arrondi au centième : $P(X \leq 4) \approx 0,81$.

d) **Espérance de X** : L'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{B}(n, p)$ est $E(X) = n \times p$.

$$E(X) = 10 \times 0,32 = 3,2$$

Interprétation : Si l'on répète un grand nombre de fois cette série de 10 contrôles, on observera en moyenne 3,2 véhicules en infraction par série de 10 contrôles.

Exercice 3 - Corrigé

Total passagers = 275. Classe Confort ($\bar{E}$) = 55. Classe Économique (E) = 220. Long séjour (L), Court séjour ($\bar{L}$). $P(L|E) = 0,35$. $P(L|\bar{E}) = 0,70$.

Partie A

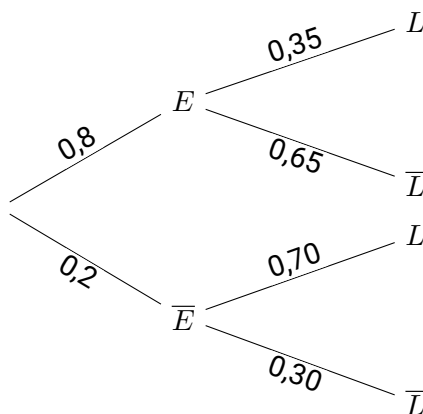
1. **Probabilité de l'événement E** : $P(E) = \frac{\text{Nombre de passagers en classe économique}}{\text{Nombre total de passagers}} = \frac{220}{275}$.

On peut simplifier la fraction : $220 = 5 \times 44 = 5 \times 4 \times 11$ et $275 = 5 \times 55 = 5 \times 5 \times 11$.

$$P(E) = \frac{4 \times 5 \times 11}{5 \times 5 \times 11} = \frac{4}{5} = 0,8$$

La probabilité qu'un passager choisi au hasard voyage en classe économique est 0,8.

2. **Arbre pondéré** :



3. **Probabilité : classe économique ET long séjour** : On cherche $P(E \cap L)$. D'après l'arbre :

$$P(E \cap L) = P(E) \times P_E(L) = 0,8 \times 0,35 = 0,28$$

4. **Montrer que $P(L) = 0,42$** : On utilise la formule des probabilités totales. L'événement L peut se réaliser via la classe E ou la classe $\bar{E}$ (Confort).

$$\begin{aligned} P(L) &= P(E \cap L) + P(\bar{E} \cap L) \\ &= P(E)P_E(L) + P(\bar{E})P_{\bar{E}}(L) \\ &= (0,8 \times 0,35) + (0,2 \times 0,70) \\ &= 0,28 + 0,14 \\ &= 0,42 \end{aligned}$$

On a bien montré que $P(L) = 0,42$.

5. **Probabilité d'être en économique SACHANT que le séjour est long** : On cherche la probabilité conditionnelle $P_L(E) = P(E|L)$.

$$P_L(E) = \frac{P(E \cap L)}{P(L)}$$

On utilise les résultats des questions 3 et 4 :

$$P_L(E) = \frac{0,28}{0,42} = \frac{28}{42} = \frac{2 \times 14}{3 \times 14} = \frac{2}{3}$$

Sachant qu'un passager part pour un long séjour, la probabilité qu'il voyage en classe économique est de $\frac{2}{3} \approx 0,667$.

Partie B

On sélectionne $n = 25$ passagers au hasard. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de passagers en classe économique.

- Loi de X :** On sélectionne 25 passagers. Si l'on considère que la sélection est faite avec remise (ou que la population de 275 est suffisamment grande pour assimiler le tirage sans remise à un tirage avec remise), on répète $n = 25$ fois une épreuve de Bernoulli indépendante. Le succès est "le passager choisi est en classe économique", avec $p = P(E) = 0,8$. Donc, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 25$ et $p = 0,8$. On note $X \sim \mathcal{B}(25; 0,8)$.
- Probabilité d'exactly 10 voyageurs en classe économique :** On cherche $P(X = 10)$.

$$P(X = 10) = \binom{25}{10} (0,8)^{10} (1 - 0,8)^{25-10} = \binom{25}{10} (0,8)^{10} (0,2)^{15}$$

À l'aide de la calculatrice : $P(X = 10) \approx 1,055 \times 10^{-4} \approx 0,0001$. (Très faible, car on s'attend à environ $25 \times 0,8 = 20$ passagers en éco). Arrondi au millièm : $P(X = 10) \approx 0,000$.

- Probabilité d'au moins un passager en classe économique :** On cherche $P(X \geq 1)$. Il est plus simple de calculer l'événement contraire : $P(X = 0)$. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$.

$$P(X = 0) = \binom{25}{0} (0,8)^0 (0,2)^{25} = 1 \times 1 \times (0,2)^{25}$$

$(0,2)^{25}$ est un nombre extrêmement petit ($\approx 3,35 \times 10^{-18}$).

$$P(X \geq 1) = 1 - (0,2)^{25} \approx 1 - 0 = 1$$

Arrondi au millièm : $P(X \geq 1) \approx 1,000$. (Il est quasi certain qu'il y ait au moins un passager en classe économique parmi les 25).

Exercice 4 - Corrigé

PARTIE I

$X \sim \mathcal{B}(n = 9, p = 0,03)$ où X compte le nombre d'adresses illisibles.

- $P(\text{aucune illisible}) = P(X = 0)$. $P(X = 0) = \binom{9}{0} (0,03)^0 (1 - 0,03)^{9-0} = 1 \times 1 \times (0,97)^9 \approx 0,760$.

Arrondi au centième : 0,76. **Réponse : d)**

$$2. P(\text{exactement 2 illisibles}) = P(X = 2). P(X = 2) = \binom{9}{2} (0,03)^2 (0,97)^{9-2} = \binom{9}{2} (0,03)^2 (0,97)^7.$$

Réponse : d) (Attention, la réponse b utilise $\binom{2}{9}$ qui n'a pas de sens, la a et la c inversent les puissances ou le k dans le binôme).

$$3. P(\text{au moins une illisible}) = P(X \geq 1). \text{L'événement contraire de "au moins 1" est "aucun" (} X = 0 \text{)}. \text{Donc } P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0). \text{ **Réponse : d)}**$$

PARTIE II

Urne : 5 Vertes (V), 3 Blanches (B). Total = 8. Tirage successif sans remise de 2 boules.

$$4. \text{Probabilité } P_{V_1}(V_2) : \text{Probabilité de tirer une Verte en 2e, sachant qu'on a tiré une Verte en 1er. Après avoir tiré une Verte (V1), il reste dans l'urne 4 Vertes et 3 Blanches. Total = 7. La probabilité de tirer alors une Verte est } \frac{4}{7}. P_{V_1}(V_2) = \frac{4}{7}. \text{ **Réponse : b)}**$$

$$5. \text{Probabilité de l'événement } V_2 \text{ (tirer une Verte en 2e). On utilise la formule des probabilités totales : } P(V_2) = P(V_1 \cap V_2) + P(B_1 \cap V_2) \quad P(V_2) = P(V_1) \times P_{V_1}(V_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(V_2)$$

- $P(V_1) = 5/8$ (au premier tirage).
- $P_{V_1}(V_2) = 4/7$ (calculé avant).
- $P(B_1) = 3/8$ (au premier tirage).
- $P_{B_1}(V_2)$: Probabilité de tirer V2 sachant qu'on a tiré B1. Après B1, il reste 5 Vertes et 2 Blanches (Total 7). Donc $P_{B_1}(V_2) = 5/7$.

$$P(V_2) = \left(\frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \right) + \left(\frac{3}{8} \times \frac{5}{7} \right) = \frac{20}{56} + \frac{15}{56} = \frac{35}{56}. \text{ On simplifie par 7 : } P(V_2) = \frac{5 \times 7}{8 \times 7} = \frac{5}{8}.$$

Réponse : a)