

Exercice 1 - Corrigé

1. Équation $y' = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$

On cherche une fonction f telle que $f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$. Il faut trouver une primitive de $3x^2$ et une primitive de $-\frac{1}{x^2}$. Une primitive de $3x^2$ est x^3 . Une primitive de $-\frac{1}{x^2}$ (qui est $-x^{-2}$) est $\frac{1}{x}$ (car la dérivée de x^{-1} est $-x^{-2}$). Donc, les primitives sont de la forme $F(x) = x^3 + \frac{1}{x} + C$, où C est une constante. Parmi les propositions, testons la c) : $f(x) = x^3 + \frac{1}{x} - 1$. Sa dérivée est $f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$. Cela correspond à l'équation (E). **Réponse : c)**

2. Équation $4y' - y = 0$

On réécrit l'équation sous la forme standard $y' = ay$. $4y' = y \iff y' = \frac{1}{4}y$. C'est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre de la forme $y' = ay$ avec $a = \frac{1}{4}$. Les solutions sont de la forme $f(x) = ke^{ax}$, où k est une constante réelle. Donc, les solutions sont $f(x) = ke^{\frac{1}{4}x}$, où $k \in \mathbb{R}$. **Réponse : a)**

3. Équation $y' = 3y - 1$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre de la forme $y' = ay + b$ avec $a = 3$ et $b = -1$. Les solutions sont de la forme $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$, où k est une constante réelle. On calcule $-\frac{b}{a} = -\frac{-1}{3} = \frac{1}{3}$. (C'est la solution particulière constante : si $y = c$, alors $y' = 0$, donc $0 = 3c - 1 \implies c = 1/3$). La solution générale est donc $f(x) = ke^{3x} + \frac{1}{3}$, où $k \in \mathbb{R}$. **Réponse : a)**

Exercice 2 - Corrigé

On a $\theta(t)$ la température en $^{\circ}\text{C}$ au temps t en minutes, $\theta(0) = 80$, et $\theta'(t) = -0,2(\theta(t) - M)$.

1. Cas $M = 0$

L'équation différentielle devient $\theta'(t) = -0,2\theta(t)$. C'est de la forme $y' = ay$ avec $a = -0,2$. La solution générale est $\theta(t) = Ce^{-0,2t}$, où C est une constante réelle. On utilise la condition initiale $\theta(0) = 80$ pour trouver C . $\theta(0) = Ce^{-0,2 \times 0} = Ce^0 = C$. Donc $C = 80$. La solution unique vérifiant la condition initiale est $\theta(t) = 80e^{-0,2t}$.

2. Cas $M = 10$

a) L'équation différentielle est $\theta'(t) = -0,2(\theta(t) - 10)$. C'est de la forme $y' = a(y - M)$ ou $y' = ay + b$ en développant : $\theta'(t) = -0,2\theta(t) + 2$. Ici, $a = -0,2$ et $b = 2$. La solution générale est de la forme $\theta(t) = ke^{at} - \frac{b}{a}$. On calcule $-\frac{b}{a} = -\frac{2}{-0,2} = 10$. (C'est la température ambiante M). Donc, la solution générale est $\theta(t) = ke^{-0,2t} + 10$, où $k \in \mathbb{R}$. On utilise la condition initiale $\theta(0) = 80$. $\theta(0) = ke^{-0,2 \times 0} + 10 = ke^0 + 10 = k + 10$. On a donc $k + 10 = 80$, ce qui donne $k = 70$. La solution unique est $\theta(t) = 70e^{-0,2t} + 10$.

b) Temps pour atteindre 40°C

On utilise la formule admise (qui est celle que l'on vient de trouver) : $\theta(t) = 70e^{-0,2t} + 10$.

On cherche t tel que $\theta(t) = 40$.

$$\begin{aligned} 40 &= 70e^{-0.2t} + 10 \\ 40 - 10 &= 70e^{-0.2t} \\ 30 &= 70e^{-0.2t} \\ \frac{30}{70} &= e^{-0.2t} \\ \frac{3}{7} &= e^{-0.2t} \end{aligned}$$

On applique la fonction logarithme népérien ($\ln$) des deux côtés :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{3}{7}\right) &= \ln(e^{-0.2t}) \\ \ln\left(\frac{3}{7}\right) &= -0.2t \\ t &= \frac{\ln(3/7)}{-0.2} \\ t &= -5 \ln\left(\frac{3}{7}\right) \end{aligned}$$

En utilisant la propriété $\ln(a/b) = -\ln(b/a)$, on a :

$$t = 5 \ln\left(\frac{7}{3}\right)$$

C'est la valeur exacte du temps en minutes. Calculons une valeur approchée à l'aide de la calculatrice :

$$t \approx 5 \times 0.8473 \approx 4.236 \text{ minutes}$$

Pour convertir la partie décimale en secondes : $0.236 \times 60 \approx 14$ secondes. Il faut attendre environ **4 minutes et 14 secondes** pour que le café atteigne 40°C .

Exercice 3 - Corrigé

Soit $f(x) = (x^2 + 9x + 19)e^{-x-5}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calcul de la dérivée $f'(x)$

La fonction f est un produit de deux fonctions $u(x) = x^2 + 9x + 19$ et $v(x) = e^{-x-5}$. Ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Calculons leurs dérivées : $u'(x) = 2x + 9$. Pour $v(x) = e^{w(x)}$ avec $w(x) = -x - 5$, on a $w'(x) = -1$. Donc $v'(x) = w'(x)e^{w(x)} = -1 \cdot e^{-x-5} = -e^{-x-5}$.

On applique la formule de dérivation d'un produit $(uv)' = u'v + uv'$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x + 9)(e^{-x-5}) + (x^2 + 9x + 19)(-e^{-x-5}) \\ &= e^{-x-5} [(2x + 9) - (x^2 + 9x + 19)] \\ &= e^{-x-5} [2x + 9 - x^2 - 9x - 19] \\ &= e^{-x-5} [-x^2 - 7x - 10] \end{aligned}$$

Factorisons le polynôme $-x^2 - 7x - 10 = -(x^2 + 7x + 10)$. On cherche les racines de $x^2 + 7x + 10 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 7^2 - 4(1)(10) = 49 - 40 = 9 = 3^2$. Les racines sont $x_1 = \frac{-7-3}{2} = -5$ et $x_2 = \frac{-7+3}{2} = -2$. Donc, $x^2 + 7x + 10 = (x - (-5))(x - (-2)) = (x + 5)(x + 2)$. Ainsi, $-x^2 - 7x - 10 = -(x + 2)(x + 5)$. Finalement, on obtient :

$$f'(x) = e^{-x-5} [-(x + 2)(x + 5)] = -(x + 2)(x + 5)e^{-x-5}$$

Ce qui est bien l'expression demandée.

2. Nombre de valeurs annulant $f'(x)$

On cherche les solutions de $f'(x) = 0$.

$$-(x + 2)(x + 5)e^{-x-5} = 0$$

Comme e^{-x-5} est une exponentielle, elle est toujours strictement positive ($e^{-x-5} > 0$). L'équation est donc équivalente à :

$$-(x + 2)(x + 5) = 0$$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Donc, $x + 2 = 0$ ou $x + 5 = 0$. Les solutions sont $x = -2$ et $x = -5$. Il y a donc **deux** valeurs qui annulent $f'(x)$.

3. Tableau de variations de f

Pour étudier les variations de f , on étudie le signe de sa dérivée $f'(x) = -(x + 2)(x + 5)e^{-x-5}$. Comme $e^{-x-5} > 0$, le signe de $f'(x)$ est le signe opposé de celui du polynôme $(x + 2)(x + 5)$. Ce polynôme du second degré a pour racines -5 et -2 . Il est positif à l'extérieur des racines et négatif entre les racines.

Signe de $f'(x)$ du signe de $(x + 2)(x + 5)$:	x	$-\infty$	-5	-2	$+\infty$	
	$(x + 2)(x + 5)$	+	0	-	0	+

On peut maintenant dresser le tableau de variations. Calculons les valeurs aux points critiques :

$$f(-5) = ((-5)^2 + 9(-5) + 19)e^{-(-5)-5} = (25 - 45 + 19)e^0 = -1.$$

$$f(-2) = ((-2)^2 + 9(-2) + 19)e^{-(-2)-5} = (4 - 18 + 19)e^{2-5} = 5e^{-3}.$$

x	$-\infty$	-5	-2	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		-1		$5e^{-3}$	0