Exercice 1 (5 points)

1. $f(x) = \dfrac{10}{(e^{2x}+1)^5} = 10(e^{2x}+1)^{-5}$.

   f est de la forme $k \times u^n$ avec $u(x) = e^{2x}+1$, donc $u'(x) = 2e^{2x}$.

   La dérivée est $f'(x) = k \times n \times u'(x) \times u(x)^{n-1}$.

$$f'(x) = 10 \times (-5) \times (2e^{2x}) \times (e^{2x}+1)^{-6} = -100e^{2x}(e^{2x}+1)^{-6}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-100e^{2x}}{(e^{2x}+1)^6}}$$

2. $f(x) = e^x - x^2 + x - 1$.

   En $+\infty$, on a une forme indéterminée "$\infty - \infty$".

   Factorisons par le terme prépondérant e^x :

$$f(x) = e^x\left(1 - \frac{x^2}{e^x} + \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)$$

   Or, d'après le cours (croissances comparées), on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ (pour tout $n > 0$).

   Par passage à l'inverse, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$.

   Ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

   La parenthèse tend donc vers 1. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, par produit :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

3. $f(x) = e^{\frac{x^2+x+1}{2x^2+1}}$.

   Posons $u(x) = \dfrac{x^2+x+1}{2x^2+1} = \dfrac{x^2(1+1/x+1/x^2)}{x^2(2+1/x^2)} = \dfrac{1+1/x+1/x^2}{2+1/x^2}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \dfrac{1}{2}$.

   Par composition avec la fonction exponentielle qui est continue en $1/2$:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^{1/2} = \sqrt{e}}$$

4. $f(x) = xe^x - e^x \cos x = e^x(x - \cos x)$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant -\cos x \leqslant 1$, donc $x - 1 \leqslant x - \cos x \leqslant x + 1$.

   On a $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty$. Par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \cos x) = +\infty$.

De plus, $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. Par produit de limites infinies :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

Exercice 2 (5 points)

1. **Limite en $+\infty$:**

   $f(x) = xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x}$.

   D'après les croissances comparées, $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, donc par inverse :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$$

2. **Variations de f :**

   f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ comme produit.

   $f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot (-e^{-x}) = e^{-x}(1-x)$.

   Comme $e^{-x} > 0$ pour tout réel, $f'(x)$ est du signe de $1 - x$.

   - $f'(x) > 0$ sur $[0\,;\,1[$.
   - $f'(x) < 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$.

   Images : $f(0) = 0$ et $f(1) = 1e^{-1} = \dfrac{1}{e} \approx 0,37$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

3. **Démonstration par récurrence :** Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

   Initialisation ($n = 0$) : $u_0 = 1$. $u_1 = f(u_0) = f(1) = e^{-1} \approx 0,37$.

   On a bien $0 \leqslant e^{-1} \leqslant 1 \leqslant 1$. La propriété est vraie au rang 0.

   Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang k : $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant 1$.

   La fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$ (d'après le tableau de variation, le maximum est en 1). Donc, en appliquant f à l'inégalité (conservation de l'ordre) :

$$f(0) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k) \leqslant f(1)$$

Or $f(0) = 0$, $f(u_{k+1}) = u_{k+2}$, $f(u_k) = u_{k+1}$ et $f(1) = e^{-1}$.

Donc : $0 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant e^{-1}$.

Comme $e^{-1} \leqslant 1$, on a bien : $0 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 1$.

Conclusion : La propriété est vraie pour tout entier naturel n.

4. **Convergence :** La suite (u_n) est décroissante (car $u_{n+1} \leqslant u_n$) et minorée par 0. D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite réelle l.
5. **Calcul de la limite :** Comme $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ pour tout n, par passage à la limite, $0 \leqslant l \leqslant 1$.

   La fonction f est continue sur $[0\,;\,1]$, donc la limite l vérifie l'équation du point fixe $f(l) = l$.

$$le^{-l} = l \iff le^{-l} - l = 0 \iff l(e^{-l} - 1) = 0$$

   Un produit est nul si l'un des facteurs est nul :

   $l = 0$ ou $e^{-l} - 1 = 0 \iff e^{-l} = 1 \iff -l = 0 \iff l = 0$.

   La seule solution est $l = 0$. **Conclusion :** La suite converge vers $\boxed{l = 0}$.

Exercice 3 (10 points)

Partie A

Soit $g(x) = e^x + x + 1$.

1. **Limites de g :**
   - En $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$. Par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$.
   - En $-\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty$. Par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty}$.
2. **Variations de g :** g est dérivable sur $\mathbb{R}$. $g'(x) = e^x + 1$. Pour tout réel x, $e^x > 0$, donc $g'(x) > 1 > 0$. La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. **Théorème des valeurs intermédiaires :**

   La fonction g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. $g(\mathbb{R}) =]-\infty\,;\,+\infty[$. Comme $0 \in]-\infty\,;\,+\infty[$, selon le Corollaire du TVI, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

Encadrement : $g(-1,28) \approx -0,0015 < 0$ et $g(-1,27) \approx 0,010 > 0$.

Donc $\boxed{-1,28 < \alpha < -1,27}$.

4. **Signe de $g(x)$:** Comme g est croissante et s'annule en α :
   - $g(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\,\alpha[$.
   - $g(x) > 0$ sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

Partie B

Soit $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x+1}$.

1. **Dérivée et variations :** On pose $u(x) = xe^x$ et $v(x) = e^x + 1$. $u'(x) = 1e^x + xe^x = e^x(1+x)$ et $v'(x) = e^x$.
$$f'(x) = \frac{e^x(1+x)(e^x+1) - xe^x(e^x)}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x[(1+x)(e^x+1) - xe^x]}{(e^x+1)^2}$$
Développons le crochet : $e^x + 1 + xe^x + x - xe^x = e^x + x + 1 = g(x)$. D'où : $\boxed{f'(x) = \dfrac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}}$.

   Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ car $e^x > 0$ et $(e^x+1)^2 > 0$. Donc f est décroissante sur $]-\infty\,;\,\alpha]$ et croissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.

2. **Minimum de f :** Le minimum est atteint en α. $f(\alpha) = \dfrac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha+1}$. On sait que $g(\alpha) = 0 \iff e^\alpha + \alpha + 1 = 0 \iff e^\alpha = -1-\alpha$. Substituons e^α dans $f(\alpha)$:
$$f(\alpha) = \frac{\alpha(-1-\alpha)}{-1-\alpha+1} = \frac{\alpha(-1-\alpha)}{-\alpha} = -(-1-\alpha) = \boxed{1+\alpha}$$
Encadrement : On a $-1,28 < \alpha < -1,27$. En ajoutant 1 : $\boxed{-0,28 < f(\alpha) < -0,27}$.

3. **Limites et asymptote :**
   - En $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x+1) = 1$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation $\boxed{y=0}$ en $-\infty$.
   - En $+\infty$: $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x(1+e^{-x})} = \dfrac{x}{1+e^{-x}}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, donc le dénominateur tend vers 1 et le numérateur vers $+\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

4. **Tableau de variations complet :**

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$1+\alpha$	$\nearrow$	$+\infty$

5. (a) **Position relative :** On étudie le signe de $d(x) = f(x) - x$.

$$f(x) - x = \frac{xe^x}{e^x + 1} - \frac{x(e^x + 1)}{e^x + 1} = \frac{xe^x - xe^x - x}{e^x + 1} = \frac{-x}{e^x + 1}$$

Le dénominateur est toujours positif. Le signe dépend de $-x$.

- Si $x < 0$, $-x > 0 \implies f(x) > x$: $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ.
- Si $x > 0$, $-x < 0 \implies f(x) < x$: $\mathscr{C}$ est en dessous de Δ.
- Si $x = 0$, intersection.

(b) **Limite de la différence :** $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x}{e^x + 1}$.

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0}$.

Interprétation : La droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.