Exercice 1 (5 points)

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{10}{(e^{2x}+1)^5}$. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x^2 + x - 1$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
3. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\frac{x^2+x+1}{2x^2+1}}$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
4. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x - e^x \cos x$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Exercice 2 (5 points)

Soit la fonction f dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, définie par $f(x) = xe^{-x}$ pour tout réel x positif et la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Étudier les variation de la fonction f puis dresser son tableau de variations.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.
4. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel, noté l.
5. Justifier que l vérifie $0 \leqslant l \leqslant 1$ et est solution de l'équation $f(x) = x$. En déduire l.

Exercice 3 (10 points)

Partie A

Soit la fonction g dérivable sur $\mathbb{R} =]-\infty\,;\,+\infty[$ définie par $g(x) = e^x + x + 1$ pour tout réel x.

1. Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.
2. Justifier que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation.
3. Prouver que l'équation sur $\mathbb{R}$, $g(x) = 0$ admet une unique solution α, puis donner un encadrement de α d'amplitude $0{,}01$.
4. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x.

Partie B

Soit la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, définie par $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x+1}$ pour tout réel x. Dans un repère, on note C la courbe représentative de f et Δ la droite d'équation $y = x$.

1. Justifier que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. En utilisant l'égalité $g(\alpha) = 0$, justifier que le minimum de f sur $\mathbb{R}$ vaut $f(\alpha) = 1 + \alpha$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude $0{,}01$.
3. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire que la courbe C admet une asymptote que l'on précisera.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. (a) Étudier la position relative de la courbe C et de la droite Δ suivant les valeurs du réel x.
   (b) Justifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$. Comment interpréter graphiquement ce résultat ?