Exercice 1

On considère les fonctions f, g et h définies par : $f(x) = x^2 - 2x + 5$ $g(x) = 2x - 5 + \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ $h(x) = e^{4x}$

1. a) **Calculer les intégrales.**

Calcul de $\int_2^4 f(x)dx$: Une primitive de $f(x) = x^2 - 2x + 5$ est $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 5x = \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x$.

$$\begin{aligned}
\int_2^4 f(x)dx &= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x\right]_2^4 \\
&= \left(\frac{4^3}{3} - 4^2 + 5 \times 4\right) - \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 + 5 \times 2\right) \\
&= \left(\frac{64}{3} - 16 + 20\right) - \left(\frac{8}{3} - 4 + 10\right) \\
&= \left(\frac{64}{3} + 4\right) - \left(\frac{8}{3} + 6\right) \\
&= \frac{64}{3} + \frac{12}{3} - \frac{8}{3} - \frac{18}{3} \\
&= \frac{64 + 12 - 8 - 18}{3} = \frac{50}{3}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\int_2^4 f(x)dx = \frac{50}{3}}$.

Calcul de $\int_1^2 g(x)dx$: Une primitive de $g(x) = 2x - 5 + \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ est $G(x) = 2\frac{x^2}{2} - 5x + \ln|x| = x^2 - 5x + \ln(x)$ (car $x > 0$ sur $[1, 2]$).

$$\begin{aligned}
\int_1^2 g(x)dx &= \left[x^2 - 5x + \ln(x)\right]_1^2 \\
&= (2^2 - 5 \times 2 + \ln(2)) - (1^2 - 5 \times 1 + \ln(1)) \\
&= (4 - 10 + \ln(2)) - (1 - 5 + 0) \\
&= (-6 + \ln(2)) - (-4) \\
&= -6 + \ln(2) + 4 = \ln(2) - 2
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\int_1^2 g(x)dx = \ln(2) - 2}$. (Remarque : $\ln(2) - 2 \approx 0.693 - 2 = -1.307 < 0$. L'interprétation en terme d'aire devra tenir compte de cela.)

Calcul de $\int_0^1 h(x)dx$: Une primitive de $h(x) = e^{4x}$ est $H(x) = \frac{1}{4}e^{4x}$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 h(x)dx &= \left[\frac{1}{4}e^{4x}\right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{4}e^{4\times 1}\right) - \left(\frac{1}{4}e^{4\times 0}\right) \\ &= \frac{1}{4}e^4 - \frac{1}{4}e^0 \\ &= \frac{1}{4}e^4 - \frac{1}{4}\times 1 = \frac{e^4-1}{4}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\int_0^1 h(x)dx = \frac{e^4-1}{4}}$.

b) **Interprétation en terme d'aire.**

Pour $\int_2^4 f(x)dx$: La fonction $f(x) = x^2-2x+5$. Son discriminant est $\Delta = (-2)^2-4\times1\times5 = 4-20 = -16 < 0$. Comme le coefficient de x^2 est positif ($1 > 0$), $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc, $\int_2^4 f(x)dx = \frac{50}{3}$ représente l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

Pour $\int_1^2 g(x)dx$: Sur $[1\,;\,2]$, $g(x) = 2x-5+\frac{1}{x}$. $g(1) = 2-5+1 = -2$. $g(2) = 4-5+\frac{1}{2} = -1+\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. La fonction g est négative sur $[1\,;\,2]$ (on pourrait étudier son signe plus en détail, mais $g(1) < 0$ et $g(2) < 0$ et elle est continue). Comme $\int_1^2 g(x)dx = \ln(2)-2 < 0$, cette intégrale représente l'opposé de l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe représentative de g, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$. L'aire est donc $2-\ln(2)$ u.a.

Pour $\int_0^1 h(x)dx$: La fonction $h(x) = e^{4x}$ est strictement positive pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc, $\int_0^1 h(x)dx = \frac{e^4-1}{4}$ représente l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe représentative de h, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

2. **Calculer d'autres intégrales.**

Calcul de $\int_1^2 f(x)dx$: On utilise la primitive $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x$.

$$\begin{aligned}
\int_1^2 f(x)dx &= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x\right]_1^2 \\
&= \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 + 5 \times 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1^2 + 5 \times 1\right) \\
&= \left(\frac{8}{3} - 4 + 10\right) - \left(\frac{1}{3} - 1 + 5\right) \\
&= \left(\frac{8}{3} + 6\right) - \left(\frac{1}{3} + 4\right) \\
&= \frac{8}{3} + \frac{18}{3} - \frac{1}{3} - \frac{12}{3} \\
&= \frac{8 + 18 - 1 - 12}{3} = \frac{13}{3}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\int_1^2 f(x)dx = \frac{13}{3}}$.

Calcul de $\int_1^2 h(x)dx$: On utilise la primitive $H(x) = \frac{1}{4}e^{4x}$.

$$\begin{aligned}
\int_1^2 h(x)dx &= \left[\frac{1}{4}e^{4x}\right]_1^2 \\
&= \left(\frac{1}{4}e^{4\times 2}\right) - \left(\frac{1}{4}e^{4\times 1}\right) \\
&= \frac{1}{4}e^8 - \frac{1}{4}e^4 = \frac{e^8 - e^4}{4}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\int_1^2 h(x)dx = \frac{e^8 - e^4}{4}}$.

3. **En déduire des intégrales.**

Pour $\int_1^4 f(x)dx$: On utilise la relation de Chasles : $\int_1^4 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx$. D'après les questions précédentes : $\int_1^2 f(x)dx = \frac{13}{3}$ et $\int_2^4 f(x)dx = \frac{50}{3}$. Donc, $\int_1^4 f(x)dx = \frac{13}{3} + \frac{50}{3} = \frac{63}{3} = 21$. $\boxed{\int_1^4 f(x)dx = 21}$.

Pour $\int_1^2 \left(e^{4x} + 2x - 5 + \frac{1}{x}\right) dx$: Par linéarité de l'intégrale : $\int_1^2 \left(e^{4x} + 2x - 5 + \frac{1}{x}\right) dx = \int_1^2 h(x)dx + \int_1^2 g(x)dx$. D'après les questions précédentes : $\int_1^2 h(x)dx = \frac{e^8 - e^4}{4}$ et $\int_1^2 g(x)dx = \ln(2) - 2$. Donc, $\int_1^2 \left(e^{4x} + 2x - 5 + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{e^8 - e^4}{4} + \ln(2) - 2$. $\boxed{\int_1^2 \left(e^{4x} + 2x - 5 + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{e^8 - e^4}{4} + \ln(2) - 2}$.

4. **Calculer les valeurs moyennes sur** $[1\,;\,2]$.

La valeur moyenne d'une fonction ϕ sur $[a\,;\,b]$ est $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \phi(x)dx$. Ici $a=1$, $b=2$, donc $b-a=1$. La valeur moyenne est donc $\dfrac{1}{1}\displaystyle\int_1^2 \phi(x)dx = \int_1^2 \phi(x)dx$.

Valeur moyenne de f sur $[1\,;\,2]$: $\mu_f = \displaystyle\int_1^2 f(x)dx = \frac{13}{3}$. $\boxed{\mu_f = \dfrac{13}{3}}$.

Valeur moyenne de g sur $[1\,;\,2]$: $\mu_g = \displaystyle\int_1^2 g(x)dx = \ln(2)-2$. $\boxed{\mu_g = \ln(2)-2}$.

Valeur moyenne de h sur $[1\,;\,2]$: $\mu_h = \displaystyle\int_1^2 h(x)dx = \frac{e^8-e^4}{4}$. $\boxed{\mu_h = \dfrac{e^8-e^4}{4}}$.

Exercice 2

Soit les fonctions $F(x) = \dfrac{-6}{x^2+2}$ et $f(x) = \dfrac{12x}{(x^2+2)^2}$ définies sur $\mathbb{R}$.

1. **Démontrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.**

   Pour cela, il faut montrer que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction F est de la forme $F(x) = -6 \times (x^2+2)^{-1}$. On peut aussi utiliser la formule de dérivation d'un quotient $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$. Ici $u(x) = -6$ donc $u'(x) = 0$. $v(x) = x^2+2$ donc $v'(x) = 2x$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{0\times(x^2+2)-(-6)\times(2x)}{(x^2+2)^2} \\ &= \frac{0-(-12x)}{(x^2+2)^2} \\ &= \frac{12x}{(x^2+2)^2} \end{aligned}$$

   On reconnaît $f(x)$. Donc $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. $\boxed{F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R}}$.

2. **Trouver la primitive de f qui s'annule en 1.**

   Toutes les primitives de f sont de la forme $G(x) = F(x) + C$, où C est une constante réelle. Soit G_0 la primitive de f qui s'annule en 1. On a $G_0(x) = \dfrac{-6}{x^2+2} + C$. On veut $G_0(1) = 0$. $G_0(1) = \dfrac{-6}{1^2+2} + C = \dfrac{-6}{1+2} + C = \dfrac{-6}{3} + C = -2 + C$. Donc $-2 + C = 0 \implies C = 2$. La primitive de f qui s'annule en 1 est $\boxed{G_0(x) = \dfrac{-6}{x^2+2} + 2}$.

3. **Calculer $\displaystyle\int_0^{10} f(x)dx$.**

On utilise la primitive $F(x)$ de f.

$$\begin{aligned}\int_0^{10} f(x)dx &= [F(x)]_0^{10}\\ &= F(10) - F(0)\\ &= \left(\frac{-6}{10^2+2}\right) - \left(\frac{-6}{0^2+2}\right)\\ &= \frac{-6}{100+2} - \frac{-6}{2}\\ &= \frac{-6}{102} - (-3)\\ &= -\frac{1}{17} + 3\\ &= -\frac{1}{17} + \frac{51}{17} = \frac{50}{17}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\int_0^{10} f(x)dx = \frac{50}{17}}$.

Exercice 3

Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes à l'aide d'une primitive.

a) $I = \int_{-4}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$ La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ est de la forme $\frac{-u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ avec $u(x) = 1-x$, donc $u'(x) = -1$. Ainsi, $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = -\frac{-1}{\sqrt{1-x}}$. Une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$. Donc une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ est $x \mapsto -2\sqrt{1-x}$.

$$\begin{aligned}I &= \left[-2\sqrt{1-x}\right]_{-4}^{0}\\ &= (-2\sqrt{1-0}) - (-2\sqrt{1-(-4)})\\ &= (-2\sqrt{1}) - (-2\sqrt{1+4})\\ &= -2\times 1 - (-2\sqrt{5})\\ &= -2 + 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

$\boxed{I = 2\sqrt{5} - 2}$.

b) $J = \int_{-1}^{0} \frac{1}{1-x} dx$ La fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est de la forme $\frac{-u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = 1-x$, donc $u'(x) = -1$. Ainsi, $\frac{1}{1-x} = -\frac{-1}{1-x}$. Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln|u|$. Donc une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est $x \mapsto -\ln|1-x|$. Sur l'intervalle $[-1\,;\,0]$, $1-x>0$, donc $|1-x| = 1-x$.

$$\begin{aligned} J &= [-\ln(1-x)]_{-1}^{0} \\ &= (-\ln(1-0)) - (-\ln(1-(-1))) \\ &= (-\ln(1)) - (-\ln(1+1)) \\ &= -0 - (-\ln(2)) = \ln(2) \end{aligned}$$

$\boxed{J = \ln(2)}$.

c) $K = \int_{2}^{3} \frac{1}{1-x} dx$ On utilise la même primitive $x \mapsto -\ln|1-x|$. Sur l'intervalle $[2\,;\,3]$, $1-x<0$, donc $|1-x| = -(1-x) = x-1$.

$$\begin{aligned} K &= [-\ln|1-x|]_{2}^{3} \\ &= [-\ln(x-1)]_{2}^{3} \\ &= (-\ln(3-1)) - (-\ln(2-1)) \\ &= (-\ln(2)) - (-\ln(1)) \\ &= -\ln(2) - (-0) = -\ln(2) \end{aligned}$$

$\boxed{K = -\ln(2)}$.

d) $L = \int_{1}^{e} \frac{\ln(x)}{x} dx$ La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ peut s'écrire $\frac{1}{x} \times \ln(x)$. Elle est de la forme $u'(x) \times u(x)^1$ avec $u(x) = \ln(x)$, donc $u'(x) = \frac{1}{x}$. Une primitive de $u'u^n$ est $\frac{u^{n+1}}{n+1}$. Ici $n = 1$. Donc une primitive de $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est $x \mapsto \frac{(\ln(x))^2}{2}$.

$$\begin{aligned} L &= \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{1}^{e} \\ &= \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} \\ &= \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\boxed{L = \frac{1}{2}}$.

Exercice 4

Calculer $\mathcal{I} = \int_{0}^{1} x^2 e^{-x} dx$ à l'aide de deux intégrations par parties.

Pour une intégration par parties, on utilise la formule $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$.

Première intégration par parties : On pose : $u(x) = x^2 \implies u'(x) = 2x$ $v'(x) = e^{-x} \implies v(x) = -e^{-x}$
Les fonctions u, v, u', v' sont continues sur $[0\,;\,1]$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \left[x^2(-e^{-x})\right]_0^1 - \int_0^1 (2x)(-e^{-x})dx \\
&= \left[-x^2e^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -2xe^{-x}dx \\
&= \left(-1^2e^{-1}\right) - \left(-0^2e^0\right) + 2\int_0^1 xe^{-x}dx \\
&= -e^{-1} - 0 + 2\int_0^1 xe^{-x}dx \\
&= -\frac{1}{e} + 2\int_0^1 xe^{-x}dx
\end{aligned}$$

Deuxième intégration par parties : Soit $\mathcal{J} = \int_0^1 xe^{-x}dx$. On pose : $u_1(x) = x \implies u_1'(x) = 1$ $v_1'(x) = e^{-x} \implies v_1(x) = -e^{-x}$ Les fonctions u_1, v_1, u_1', v_1' sont continues sur $[0\,;\,1]$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} &= \left[x(-e^{-x})\right]_0^1 - \int_0^1 (1)(-e^{-x})dx \\
&= \left[-xe^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}dx \\
&= \left(-1e^{-1}\right) - \left(-0e^0\right) + \int_0^1 e^{-x}dx \\
&= -e^{-1} - 0 + \left[-e^{-x}\right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{e} + \left((-e^{-1}) - (-e^0)\right) \\
&= -\frac{1}{e} + \left(-\frac{1}{e} + 1\right) \\
&= 1 - \frac{2}{e}
\end{aligned}$$

Conclusion : On remplace la valeur de $\mathcal{J}$ dans l'expression de $\mathcal{I}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= -\frac{1}{e} + 2\mathcal{J} \\
&= -\frac{1}{e} + 2\left(1 - \frac{2}{e}\right) \\
&= -\frac{1}{e} + 2 - \frac{4}{e} \\
&= 2 - \frac{5}{e}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\int_0^1 x^2e^{-x}dx = 2 - \frac{5}{e}}$.