Exercice 1 - Corrigé

On cherche une primitive pour chaque fonction sur l'intervalle donné. On utilise les formules des primitives des fonctions usuelles.

1. $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 7x - 2$ sur $\mathbb{R}$.
   Une primitive de x^n est $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$. On primitive terme à terme :
   $$F(x) = 5 \times \frac{x^5}{5} - 3 \times \frac{x^3}{3} + 7 \times \frac{x^2}{2} - 2x$$
   Donc, une primitive de f est :
   $$F(x) = x^5 - x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 2x$$
   Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. $g(x) = \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$.
   On peut écrire $g(x) = 3 \times \dfrac{1}{x} - x^{-2}$.
   Une primitive de $\dfrac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ est $\ln(x)$.
   Une primitive de x^{-2} est $\dfrac{x^{-2+1}}{-2+1} = \dfrac{x^{-1}}{-1} = -\dfrac{1}{x}$.
   Donc, une primitive de g est :
   $$G(x) = 3\ln(x) - \left(-\frac{1}{x}\right) = 3\ln(x) + \frac{1}{x}$$
   Cette fonction est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$.
3. $h(x) = 2e^x + \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   Une primitive de e^x est e^x.
   Une primitive de $\cos(x)$ est $\sin(x)$.
   Donc, une primitive de h est :
   $$H(x) = 2e^x + \sin(x)$$
   Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. $k(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$.
   On écrit $k(x) = 4x^{-1/2}$.
   On utilise la forme x^n avec $n = -1/2$. Une primitive est :
   $$K(x) = 4 \times \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} = 4 \times \frac{x^{1/2}}{1/2} = 4 \times 2x^{1/2} = 8\sqrt{x}$$
   Donc, une primitive de k est $K(x) = 8\sqrt{x}$.
   Cette fonction est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$.

Exercice 2 - Corrigé

On cherche une primitive en reconnaissant des formes du type $u'u^n$, u'/u ou $u'e^u$.

1. $f(x) = (2x+1)(x^2+x+5)^3$ sur $\mathbb{R}$.
   On pose $u(x) = x^2+x+5$. Alors $u'(x) = 2x+1$.
   La fonction f est de la forme $f(x) = u'(x)[u(x)]^3$. C'est la forme $u'u^n$ avec $n=3$.
   Une primitive de $u'u^n$ est $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$.
   Donc, une primitive de f est :
   $$F(x) = \frac{(x^2+x+5)^{3+1}}{3+1} = \frac{(x^2+x+5)^4}{4}$$
   Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. $g(x) = \dfrac{6x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.
   On pose $u(x) = x^2+1$. Alors $u'(x) = 2x$.
   On remarque que $g(x) = 3 \times \dfrac{2x}{x^2+1} = 3\dfrac{u'(x)}{u(x)}$. C'est la forme $k\dfrac{u'}{u}$ avec $k=3$.
   Une primitive de $k\dfrac{u'}{u}$ est $k\ln(|u|)$.
   Comme $u(x) = x^2+1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|u(x)| = u(x) = x^2+1$.
   Donc, une primitive de g est :
   $$G(x) = 3\ln(x^2+1)$$
   Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. $h(x) = 3e^{3x-1}$ sur $\mathbb{R}$.
   On pose $u(x) = 3x-1$. Alors $u'(x) = 3$.
   La fonction h est de la forme $h(x) = u'(x)e^{u(x)}$. C'est la forme $u'e^u$.
   Une primitive de $u'e^u$ est e^u.
   Donc, une primitive de h est :
   $$H(x) = e^{3x-1}$$
   Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. $k(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$ sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.
   On pose $u(x) = \cos(x)$. Alors $u'(x) = -\sin(x)$.
   On peut écrire $k(x) = \dfrac{-(-\sin(x))}{(\cos(x))^2} = -\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$. C'est la forme $-\dfrac{u'}{u^2}$.
   Une primitive de $-\dfrac{u'}{u^2}$ est $\dfrac{1}{u}$.
   (Alternativement : $k(x) = (-\sin(x))(\cos(x))^{-2} = -u'(x)[u(x)]^{-2}$, forme $-u'u^n$ avec $n=-2$. Primitive : $-\dfrac{u^{-2+1}}{-2+1} = -\dfrac{u^{-1}}{-1} = u^{-1} = \dfrac{1}{u}$).

Donc, une primitive de k est :

$$K(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

Sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $\cos(x) \neq 0$, donc la fonction est bien définie.

Exercice 3 - Corrigé

Soit $f(x) = x^2 + e^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Détermination de l'ensemble des primitives F de f sur $\mathbb{R}$.
   Une primitive de x^2 est $\frac{x^3}{3}$.
   Pour trouver une primitive de e^{-x}, on reconnaît la forme e^{ax} avec $a = -1$, une primitive est $\frac{1}{a}e^{ax} = \frac{1}{-1}e^{-x} = -e^{-x}$. (Ou : On pose $u(x) = -x$, $u'(x) = -1$. $e^{-x} = -(-1)e^{-x} = -u'(x)e^{u(x)}$. Primitive : $-e^{u(x)} = -e^{-x}$).

   L'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$ est l'ensemble des fonctions F de la forme :

   $$F(x) = \frac{x^3}{3} - e^{-x} + C, \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

2. Détermination de la primitive F telle que $F(0) = 4$.
   On utilise l'expression générale $F(x) = \frac{x^3}{3} - e^{-x} + C$.
   On calcule $F(0)$:

   $$F(0) = \frac{0^3}{3} - e^{-0} + C = 0 - e^0 + C = -1 + C$$

   On veut que $F(0) = 4$. L'équation à résoudre est :

   $$-1 + C = 4$$

   On en déduit :

   $$C = 4 + 1 = 5$$

   La primitive recherchée est donc :

   $$F(x) = \frac{x^3}{3} - e^{-x} + 5$$

Exercice 4 - Corrigé

Soit $f(x) = (2x+3)e^{2x}$ et $F(x) = (x+1)e^{2x}$ définies sur $\mathbb{R}$.
Pour montrer que F est une primitive de f, nous devons calculer la dérivée $F'(x)$ et vérifier si $F'(x) = f(x)$.

La fonction $F(x)$ est un produit de la forme $u(x)v(x)$ avec :

- $u(x) = x + 1$, donc $u'(x) = 1$.
- $v(x) = e^{2x}$, donc $v'(x) = 2e^{2x}$ (dérivée de e^{ax} est ae^{ax}).

On utilise la formule de dérivation d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$.

$$F'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$
$$F'(x) = (1)(e^{2x}) + (x + 1)(2e^{2x})$$
$$F'(x) = e^{2x} + 2(x + 1)e^{2x}$$

On factorise par e^{2x} :

$$F'(x) = e^{2x}[1 + 2(x + 1)]$$
$$F'(x) = e^{2x}[1 + 2x + 2]$$
$$F'(x) = e^{2x}(2x + 3)$$
$$F'(x) = (2x + 3)e^{2x}$$

On retrouve bien l'expression de $f(x)$.

$$F'(x) = f(x)$$

Puisque $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction F est bien une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.