

EXERCICE 1

Compétences de base

1. On étudie la fonction $f(x) = -3x^2 + 8x + 35$.

a. **Résolution de $f(x) = 0$**

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4(-3)(35) = 64 + 420 = 484$. $\sqrt{\Delta} = \sqrt{484} = 22$.

Le discriminant est positif, il y a donc deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - 22}{2(-3)} = \frac{-30}{-6} = 5$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + 22}{2(-3)} = \frac{14}{-6} = -\frac{7}{3}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{7}{3}; 5 \right\}$.

Interprétation graphique : Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la parabole $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

b. **Tableau de signe**

Le trinôme $f(x)$ est du signe de $a = -3$ (négatif) à l'extérieur des racines et du signe opposé (positif) entre les racines.

x	$-\infty$	$-\frac{7}{3}$	5	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

c. **Résolution de $f(x) < 0$**

D'après le tableau de signe, $f(x)$ est strictement négatif lorsque x est à l'extérieur des racines.

$$\mathcal{S} = \left] -\infty; -\frac{7}{3} \right[\cup] 5; +\infty[$$

d. **Forme factorisée**

La forme factorisée est $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

$$f(x) = -3 \left(x - \left(-\frac{7}{3} \right) \right) (x - 5) = -3 \left(x + \frac{7}{3} \right) (x - 5)$$

Pour une forme plus élégante, on peut distribuer le 3 :

$$f(x) = -(3x + 7)(x - 5)$$

2. On étudie la fonction $g(x) = -3x^2 + 12x - 5$.

a. **Nature de l'extremum**

Le coefficient du terme en x^2 est $a = -3$. Comme $a < 0$, la parabole représentative $\mathcal{C}_g$ est tournée vers le bas (concave). La fonction g admet donc un **maximum**.

b. Valeur de l'extremum

Ce maximum est atteint pour $x = \alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2(-3)} = 2$. La valeur du maximum est $\beta = g(\alpha) = g(2) = -3(2)^2 + 12(2) - 5 = -12 + 24 - 5 = 7$.

La fonction g admet un maximum de 7, atteint en $x = 2$.

3. Intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

On résout l'équation $f(x) = g(x) : -3x^2 + 8x + 35 = -3x^2 + 12x - 5$

$$8x + 35 = 12x - 5$$

$$40 = 4x$$

$$x = 10.$$

L'équation n'ayant qu'une seule solution, les courbes ont un unique point d'intersection. On calcule son ordonnée : $y = g(10) = -3(10)^2 + 12(10) - 5 = -300 + 120 - 5 = -185$.

Le point d'intersection unique est $I(10; -185)$.

4. a. Résolution de $f(x) > g(x)$

$f(x) - g(x) > 0$. D'après le calcul précédent, $f(x) - g(x) = -4x + 40$. On résout donc $-4x + 40 > 0 \iff 40 > 4x \iff 10 > x$.

$$\mathcal{S} =]-\infty; 10[$$

b. Interprétation graphique

Les solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ sont les abscisses des points pour lesquels la courbe $\mathcal{C}_f$ est située strictement au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$.

EXERCICE 2

Forme canonique

La forme canonique d'une fonction du second degré est $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, où $S(\alpha; \beta)$ est le sommet de la parabole.

- Par lecture graphique, on identifie le sommet $S(1; 2)$. Donc $\alpha = 1$ et $\beta = 2$. L'expression est de la forme $f(x) = a(x - 1)^2 + 2$.
- Pour trouver a , on utilise un autre point de la courbe, par exemple l'origine $(0; 0)$. On remplace x par 0 et $f(x)$ par 0 : $0 = a(0 - 1)^2 + 2 \implies 0 = a(1) + 2 \implies a = -2$.

La forme canonique de la fonction est donc :

$$f(x) = -2(x - 1)^2 + 2$$

EXERCICE 3

Rugby

La trajectoire est modélisée par $f(x) = x - \frac{x^2}{10} = -\frac{1}{10}x^2 + x$.

1. Distance de retombée

Le ballon retombe au sol lorsque son altitude est nulle, soit $f(x) = 0$. $x - \frac{x^2}{10} = 0 \iff x \left(1 - \frac{x}{10}\right) = 0$. Les solutions sont $x = 0$ (point de départ) et $1 - \frac{x}{10} = 0 \iff x = 10$.

Le ballon retombera à 10 mètres du joueur.

2. Hauteur maximale

C'est un polynôme du second degré avec $a = -1/10 < 0$, donc la trajectoire a un maximum. Il est atteint pour $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2(-1/10)} = \frac{1}{1/5} = 5$. La hauteur maximale est $f(5) = 5 - \frac{5^2}{10} = 5 - \frac{25}{10} = 5 - 2,5 = 2,5$.

La hauteur maximale atteinte par le ballon est de 2,5 mètres.

3. Réussite de la pénalité

La ligne de but est à 5 mètres du joueur ($x = 5$). La barre est à 3 mètres de hauteur. La pénalité est réussie si la hauteur du ballon à $x = 5$ est supérieure à 3 mètres. D'après la question précédente, $f(5) = 2,5$ m. Comme $2,5 < 3$, le ballon passe sous la barre.

Non, la pénalité n'est pas réussie.

EXERCICE 4

Oubli regrettable

L'équation est $-2x^2 + 4x + c = 0$. Pour qu'une équation du second degré ait une unique solution, son discriminant Δ doit être nul. $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(-2)(c) = 16 + 8c$. On résout $\Delta = 0 \iff 16 + 8c = 0 \iff 8c = -16 \iff c = -2$.

$$c = -2$$

EXERCICE 5

Contrôle technique

1. Résolution de $x \leq \frac{3}{x-2}$

La valeur $x = 2$ est une valeur interdite. On résout sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. $x - \frac{3}{x-2} \leq 0 \iff \frac{x(x-2) - 3}{x-2} \leq 0 \iff \frac{x^2 - 2x - 3}{x-2} \leq 0$. On étudie le signe du numérateur $N(x) = x^2 - 2x - 3$. $\Delta_N = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 16 = 4^2$. Racines : $x_1 = \frac{2-4}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$. Le dénominateur $D(x) = x-2$ s'annule en 2.

x	$-\infty$	-1	2	3	$+\infty$		
x^2-2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x-2$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
Quotient		$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

On cherche les intervalles où le quotient est négatif ou nul.

$$\mathcal{S} =]-\infty; -1] \cup]2; 3]$$

2. Résolution de $2x^4 - 2x^2 - 24 = 0$

C'est une équation bicarrée. On pose le changement de variable $X = x^2$, avec la condition $X \geq 0$. L'équation devient $2X^2 - 2X - 24 = 0$, ou en simplifiant par 2, $X^2 - X - 12 = 0$. $\Delta_X = (-1)^2 - 4(1)(-12) = 1 + 48 = 49 = 7^2$. $X_1 = \frac{1-7}{2} = -3$ et $X_2 = \frac{1+7}{2} = 4$. La solution $X_1 = -3$ est rejetée car elle est négative. On conserve $X_2 = 4$. On revient à la variable x : $x^2 = 4 \iff x = 2$ ou $x = -2$.

$$\mathcal{S} = \{-2; 2\}$$

EXERCICE 6

Optimisation

Préliminaire : expression de $f(x)$

La fonction f est une fonction affine, car sa représentation est une droite. Son expression est de la forme $f(x) = ax + b$. Le point $B(0; 3)$ est l'ordonnée à l'origine, donc $b = 3$. La droite passe par $A(\frac{3}{2}; 0)$, donc $f(\frac{3}{2}) = 0 \iff a(\frac{3}{2}) + 3 = 0 \iff \frac{3}{2}a = -3 \iff a = -2$. L'expression de la fonction est donc $f(x) = -2x + 3$.

1. Aire maximale du rectangle OCMD

Le point M a pour coordonnées $(x; f(x))$, soit $(x; -2x + 3)$. Pour que le rectangle soit dans le premier quadrant, on doit avoir $x \geq 0$ et $f(x) \geq 0$, soit $-2x + 3 \geq 0 \iff x \leq \frac{3}{2}$. Le domaine d'étude est donc $x \in [0; \frac{3}{2}]$. L'aire du rectangle OCMD est $\mathcal{A}(x) = OC \times OD = x \times f(x) = x(-2x + 3) = -2x^2 + 3x$. La fonction $\mathcal{A}(x)$ est un polynôme du second degré avec un coefficient $a = -2 < 0$. Elle admet donc un maximum. Ce maximum est atteint pour $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2(-2)} = \frac{3}{4}$. Cette valeur est bien dans l'intervalle $[0; \frac{3}{2}]$.

$$\text{L'aire du rectangle est maximale pour } x = \frac{3}{4}.$$

2. Comparaison des aires

L'aire du triangle OAB, rectangle en O, est $\mathcal{A}_{OAB} = \frac{OA \times OB}{2} = \frac{\frac{3}{2} \times 3}{2} = \frac{9/2}{2} = \frac{9}{4}$. La moitié de

cette aire est $\frac{1}{2}\mathcal{A}_{OAB} = \frac{9}{8}$. On cherche à savoir s'il existe x tel que $\mathcal{A}(x) = \frac{9}{8}$. $-2x^2 + 3x = \frac{9}{8} \iff -2x^2 + 3x - \frac{9}{8} = 0$. On calcule le discriminant : $\Delta = 3^2 - 4(-2)\left(-\frac{9}{8}\right) = 9 - 8\left(\frac{9}{8}\right) = 9 - 9 = 0$.

Comme $\Delta = 0$, il existe une unique solution : $x = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{4}$.

Oui, c'est possible pour $x = \frac{3}{4}$.

(C'est la position où l'aire du rectangle est maximale).