

Exercice 1 : Techniques élémentaires

1. Equation et inéquation :

a) Résolution de $4(-2x - 5) < x^2(-2x - 5)$

On regroupe tous les termes du même côté pour comparer à zéro : $4(-2x - 5) - x^2(-2x - 5) < 0$

On factorise par le facteur commun $(-2x - 5)$: $(-2x - 5)(4 - x^2) < 0$

On reconnaît une identité remarquable $4 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$. L'inéquation devient : $(-2x - 5)(2 - x)(2 + x) < 0$

On étudie le signe de ce produit à l'aide d'un tableau de signes. Les racines des facteurs sont : $-2x - 5 = 0 \iff x = -\frac{5}{2}$, $2 - x = 0 \iff x = 2$, $2 + x = 0 \iff x = -2$.

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	-2	2	$+\infty$		
$-2x - 5$	$+$	0	$-$	$-$	$-$		
$2 - x$	$+$		$+$	$+$	0	$-$	
$2 + x$	$-$		$-$	0	$+$	$+$	
Produit	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

On cherche les intervalles où le produit est strictement négatif.

$$\mathcal{S} = \left] -\frac{5}{2}; -2 \right[\cup] 2; +\infty[$$

b) Résolution de $\frac{5}{-4x + 2} = \frac{7}{3x - 1}$

D'abord, on détermine les valeurs interdites pour que les dénominateurs ne soient pas nuls :

$-4x + 2 \neq 0 \iff x \neq \frac{1}{2}$ et $3x - 1 \neq 0 \iff x \neq \frac{1}{3}$. L'ensemble de définition est $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right\}$. Sur $\mathcal{D}$, on peut utiliser le produit en croix : $5(3x - 1) = 7(-4x + 2)$ $15x - 5 = -28x + 14$ $15x + 28x = 14 + 5$ $43x = 19$ $x = \frac{19}{43}$

Cette valeur n'est pas une valeur interdite.

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{19}{43} \right\}$$

2. Le second degré :

a) Formes de $f(x) = -2x^2 + 8x + 42$

Forme factorisée : On cherche les racines en résolvant $f(x) = 0$. $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4(-2)(42) = 64 + 336 = 400 = 20^2$. $x_1 = \frac{-8 - 20}{2(-2)} = \frac{-28}{-4} = 7$ et $x_2 = \frac{-8 + 20}{2(-2)} = \frac{12}{-4} = -3$.

La forme factorisée est $a(x - x_1)(x - x_2)$.

$$f(x) = -2(x - 7)(x + 3)$$

Forme canonique : On part de $f(x) = -2(x^2 - 4x) + 42$. $f(x) = -2[(x - 2)^2 - 4] + 42 = -2(x - 2)^2 + 8 + 42$.

$$f(x) = -2(x - 2)^2 + 50$$

b) **Résolution de** $5x^2 - 49x = 10$

On résout $5x^2 - 49x - 10 = 0$. $\Delta = (-49)^2 - 4(5)(-10) = 2401 + 200 = 2601 = 51^2$.

$$x_1 = \frac{49 - 51}{2(5)} = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5} \text{ et } x_2 = \frac{49 + 51}{2(5)} = \frac{100}{10} = 10.$$

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{1}{5}; 10 \right\}$$

c) **Résolution de** $-3x^2 \leq 7x + 10$ et $2x^2 - 26x + 44 > 0$

Première inéquation : $-3x^2 - 7x - 10 \leq 0$. $\Delta = (-7)^2 - 4(-3)(-10) = 49 - 120 = -71$. $\Delta < 0$, donc le trinôme est toujours du signe de $a = -3$, c'est-à-dire toujours négatif. L'inéquation est donc toujours vérifiée. $\mathcal{S}_1 = \mathbb{R}$.

Deuxième inéquation : $2x^2 - 26x + 44 > 0$. On peut simplifier par 2 : $x^2 - 13x + 22 > 0$.

$\Delta = (-13)^2 - 4(1)(22) = 169 - 88 = 81 = 9^2$. Les racines sont $x_1 = \frac{13 - 9}{2} = 2$ et

$x_2 = \frac{13 + 9}{2} = 11$. Le trinôme est du signe de $a = 1$ (positif) à l'extérieur des racines.

$\mathcal{S}_2 =] - \infty; 2[\cup] 11; +\infty[$.

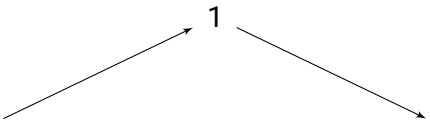
La solution finale est l'intersection $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$.

$$\mathcal{S} =] - \infty; 2[\cup] 11; +\infty[$$

d) **Tableau de variation de** $f(x) = -3x^2 + 3x + \frac{1}{4}$

Le coefficient $a = -3$ est négatif, la parabole est donc tournée vers le bas. La fonction est croissante puis décroissante. L'abscisse du sommet est $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2(-3)} = \frac{1}{2}$.

L'ordonnée du sommet est $\beta = f(\frac{1}{2}) = -3(\frac{1}{2})^2 + 3(\frac{1}{2}) + \frac{1}{4} = -3(\frac{1}{4}) + \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} + \frac{6}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$			

e) **Racines de** $f(x) = 3x^2 + x - 2$

On teste des valeurs simples : $f(1) = 3 + 1 - 2 = 2$, $f(-1) = 3 - 1 - 2 = 0$. Donc $x_1 = -1$

est une racine évidente. Le produit des racines $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-2}{3}$. Donc $(-1) \cdot x_2 = -\frac{2}{3}$,

$$\text{d'où } x_2 = \frac{2}{3}.$$

f) **Déterminer un polynôme**

Les racines sont 5 et -4, donc la forme factorisée est $f(x) = a(x - 5)(x - (-4)) = a(x -$

5)(x + 4). On utilise la condition $f(0) = 3$. $f(0) = a(0 - 5)(0 + 4) = a(-20) = -20a$.
 $-20a = 3 \iff a = -\frac{3}{20}$.

$$f(x) = -\frac{3}{20}(x - 5)(x + 4)$$

g) **Équation paramétrique** $mx^2 - 6x + m = 0$

Pour que l'équation soit du second degré et admette deux solutions (distinctes), il faut deux conditions :

i. Le coefficient de x^2 ne doit pas être nul : $m \neq 0$.

ii. Le discriminant Δ doit être strictement positif.

$\Delta = (-6)^2 - 4(m)(m) = 36 - 4m^2$. On résout $\Delta > 0 \iff 36 - 4m^2 > 0 \iff 36 > 4m^2 \iff 9 > m^2$. L'inéquation $m^2 < 9$ est équivalente à $-3 < m < 3$. En combinant les deux conditions, m doit être dans $] -3 ; 3[$ tout en étant non nul.

$$m \in] -3 ; 0[\cup] 0 ; 3[$$

Exercice 2 : À partir de la courbe ...

1. Signes de a et Δ

La parabole est tournée vers le bas (concave), donc le coefficient directeur $a < 0$. La courbe coupe l'axe des abscisses en deux points distincts (B et C), donc l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions distinctes, ce qui signifie que le discriminant $\Delta > 0$.

2. Forme canonique et factorisée

Par lecture graphique, on identifie :

- Le sommet $A(-2 ; 3)$.
- Les racines (points d'intersection avec l'axe des abscisses) $B(-3 ; 0)$ et $C(-1 ; 0)$.

Forme canonique : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Avec $(\alpha, \beta) = (-2, 3)$, on a $f(x) = a(x + 2)^2 + 3$.

Forme factorisée : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Avec $x_1 = -3$ et $x_2 = -1$, on a $f(x) = a(x + 3)(x + 1)$.

Pour trouver a , utilisons le point $A(-2, 3)$ dans la forme factorisée : $f(-2) = a(-2 + 3)(-2 + 1) = a(1)(-1) = -a$. Or, $f(-2) = 3$, donc $-a = 3 \iff a = -3$. Les expressions sont donc :

$$\text{Forme canonique : } f(x) = -3(x + 2)^2 + 3$$

$$\text{Forme factorisée : } f(x) = -3(x + 3)(x + 1)$$

3. Discussion du nombre de solutions de $f(x) = k$

Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ correspond au nombre de points d'intersection entre la parabole représentant f et la droite horizontale d'équation $y = k$. Graphiquement, on observe :

- Si $k > 3$: La droite est au-dessus du sommet A . Il n'y a **aucune solution**.
- Si $k = 3$: La droite touche le sommet. Il y a **une unique solution** ($x = -2$).
- Si $k < 3$: La droite coupe la parabole en deux points. Il y a **deux solutions distinctes**.

Exercice 3

On veut démontrer que pour tout $x \neq 1$, $1 + x + x^2 + x^3 = \frac{1 - x^4}{1 - x}$. Soit $S = 1 + x + x^2 + x^3$. Multiplions S par $(1 - x)$:

$$\begin{aligned}(1 - x) \times S &= (1 - x)(1 + x + x^2 + x^3) \\ &= 1 \times (1 + x + x^2 + x^3) - x \times (1 + x + x^2 + x^3) \\ &= (1 + x + x^2 + x^3) - (x + x^2 + x^3 + x^4) \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 - x - x^2 - x^3 - x^4 \\ &= 1 - x^4\end{aligned}$$

On a donc $(1 - x)S = 1 - x^4$. Comme on a supposé que $x \neq 1$, alors $1 - x \neq 0$, et on peut diviser les deux membres de l'égalité par $(1 - x)$: $S = \frac{1 - x^4}{1 - x}$. Ceci démontre bien que pour tout réel $x \neq 1$:

$$1 + x + x^2 + x^3 = \frac{1 - x^4}{1 - x}$$