

Exercice 1 :

Soit les fonctions f et g définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Déterminer $f'(x)$ et $g'(x)$ sachant que

$$f(x) = \ln(e^x + e^{2x})$$

$$g(x) = \ln\left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2}\right)$$

Exercice 2 :

1. Résoudre les inéquations et équation suivantes :

(a) $-x^2 + 8x + 9 < 0$.

(b) $\ln(x+1) - \ln(-4x-4) + \ln(5-x) = 0$.

(c) $8 \ln x + 9 < (\ln x)^2$.

(d) $\ln((x-3)^2) < \ln(x+9) + \ln 2$.

(e) $2 \ln(x-3) < \ln(x+9) + \ln 2$.

2. Déterminer l'ensemble des entiers naturels vérifiant l'inéquation suivante : $\left(\frac{7}{8}\right)^n < 0,01$.

3. Déterminer l'ensemble des entiers naturels vérifiant l'inéquation suivante : $5^{n+2} < 20000$.

Exercice 3 :

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(x)$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin(x))}{x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x)$

Exercice 4 :

Le but de ce problème est d'étudier dans la partie A la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x^2}$ et de déterminer ensuite dans la partie B la position de sa courbe représentative par rapport à son asymptote oblique.

Partie A

1. Soit g la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 1$.
 - (a) Montrer que la fonction g est dérivable et que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$.
 - (b) Étudier les variations de la fonction g puis déterminer le signe de $g(x)$.
2. (a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
 - (b) Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ puis donner le tableau de variations de f .

Partie B

(C_f) désigne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; i, j)$ unité graphique 2 cm.

1. Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = x + \ln(x)$.
 - (a) Dresser le tableau de variation de h , puis montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0,4; 0,7]$.
 - (b) Montrer que l'on a : $e^{-\alpha} = \alpha$.
2. (a) Vérifier que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$.
 - (b) Utiliser les résultats de la question 1.a pour déterminer les positions relatives de (C_f) et (Δ) .
3. Construire (C_f) et (Δ) dans le repère orthonormé $(O; i, j)$.