

Exercice 1

1. Composition $f = v \circ u$ avec $u(x) = -x^2 - 2x + 8$ et $v(x) = \sqrt{x}$

a) **Domaines.** u est polynomiale donc définie sur $\mathbb{R}$. $v(x) = \sqrt{x}$ est définie sur $[0, +\infty[$.

b) **Domaine de $f = v \circ u$ et expression (méthode par discriminant).** On cherche les x tels que $u(x) \geq 0$ avec

$$u(x) = -x^2 - 2x + 8.$$

C'est un polynôme du second degré de coefficients $a = -1, b = -2, c = 8$.

Discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(-1) \cdot 8 = 4 + 32 = 36.$$

Racines réelles :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm 6}{-2} \in \{-4, 2\}.$$

Comme $a = -1 < 0$, la parabole est tournée vers le bas, donc $u(x) > 0$ entre les racines et $u(x) < 0$ à l'extérieur. D'où le tableau de signe :

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$	
$u(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Ainsi,

$$u(x) \geq 0 \iff x \in [-4, 2].$$

Donc le domaine de f est $D_f = [-4, 2]$ et, pour $x \in [-4, 2]$,

$$f(x) = v(u(x)) = \sqrt{u(x)} = \sqrt{-x^2 - 2x + 8} = \sqrt{9 - (x+1)^2}.$$

c) **Variations.** Le signe de $f'(x)$ sur $(-4, 2)$ dépend de $-(x+1)$:

$$\begin{cases} x < -1 \Rightarrow f'(x) > 0 \text{ (croissante)} \\ x = -1 \Rightarrow f'(x) = 0 \\ x > -1 \Rightarrow f'(x) < 0 \text{ (décroissante)} \end{cases}$$

Valeurs remarquables :

$$f(-4) = 0, \quad f(-1) = 3, \quad f(2) = 0.$$

x	-4	-1	2
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	3	0

2. Étude de $g(x) = 5e^{x^3-9x}$ sur $\mathbb{R}$

a) Dérivée.

$$g'(x) = 5e^{x^3-9x} (3x^2 - 9) = 15e^{x^3-9x} (x^2 - 3).$$

b) Tableau de signe de g' et de variations de g .

Comme $e^{x^3-9x} > 0$ pour tout x , le signe de $g'(x)$ est celui de $(x^2 - 3)$:

$$\begin{cases} g'(x) > 0 & \text{si } x < -\sqrt{3} \text{ ou } x > \sqrt{3}, \\ g'(x) = 0 & \text{pour } x = \pm\sqrt{3}, \\ g'(x) < 0 & \text{si } -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}. \end{cases}$$

On note de plus :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0^+, \quad g(-\sqrt{3}) = 5e^{6\sqrt{3}}, \quad g(\sqrt{3}) = 5e^{-6\sqrt{3}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	+
$g(x)$	0^+	$5e^{6\sqrt{3}}$	$5e^{-6\sqrt{3}}$	$+\infty$

Ainsi, g est **croissante** sur $(-\infty, -\sqrt{3}]$, **décroissante** sur $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, puis **croissante** sur $[\sqrt{3}, +\infty)$;
 $x = -\sqrt{3}$ est un *maximum local*, $x = \sqrt{3}$ un *minimum local*.

Exercice 2

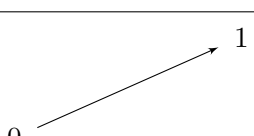
On connaît seulement la courbe de f'' (avec $A(-2; 0)$, $B(0; -6)$, $C(3; 0)$). Les justifications sont *graphiques*.

- 1) **Points d'inflexion de f .** f'' s'annule en changeant de signe en $x = -2$ et $x = 3$: ce sont des points d'inflexion.
- 2) **Convexité sur $[-2; 3]$.** On lit $f'' \leq 0$ sur $[-2, 3]$: f est **concave** sur $[-2, 3]$.
- 3) **Choix de la courbe de f .** La bonne courbe est convexe pour $x < -2$, concave sur $[-2, 3]$, convexe pour $x > 3$, avec inflexions en -2 et 3 .

Exercice 3

Partie A : $g(x) = 1 - e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$

- 1) **Variations.** $g'(x) = e^{-x} > 0$: g est **strictement croissante** sur $[0, +\infty[$.
 $g(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$		

- 2) **Convexité.** $g''(x) = -e^{-x} < 0$: g est **concave** sur $[0, +\infty[$.

Partie B : $f(x) = (x - 1)e^{-kx} + 1$ avec $k > 0$

- 1) a) **Dérivée.**

$$f'(x) = e^{-kx} + (x - 1)(-k)e^{-kx} = e^{-kx}(1 - k(x - 1)) = \boxed{e^{-kx}(-kx + k + 1)}.$$

- b) **Ordonnée de B (tangente en $x = 1$).** $y_B = f(1) - f'(1)$, avec $f(1) = 1$ et $f'(1) = e^{-k}$, d'où

$$\boxed{y_B = 1 - e^{-k} = g(k)}.$$

- 2) **Position de B .** g est croissante sur $[0, +\infty[$ et $0 < g(k) < 1$ pour $k > 0$: $B(0, g(k))$ est sur le segment $[OJ]$.