Exercice 1

1. **Calcul de la dérivée de** $f(x) = (x^2 - 3x + 7)^5$

   On utilise la formule de dérivation des fonctions composées $(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$.

   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   $$f'(x) = 5 \times (2x - 3) \times (x^2 - 3x + 7)^{5-1}$$

   $$\boxed{f'(x) = 5(2x - 3)(x^2 - 3x + 7)^4}$$

2. **Calcul de la dérivée de** $g(x) = \dfrac{1}{(x^2 + 5)^3}$

   On peut écrire $g(x) = (x^2 + 5)^{-3}$. g est de la forme u^n avec $u(x) = x^2 + 5$ et $n = -3$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $u'(x) = 2x$.

   On utilise la même formule $(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$.

   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   $$g'(x) = -3 \times (2x) \times (x^2 + 5)^{-3-1}$$

   $$g'(x) = -6x(x^2 + 5)^{-4}$$

   En revenant à une écriture fractionnaire :

   $$\boxed{g'(x) = -\frac{6x}{(x^2 + 5)^4}}$$

3. **Calcul de la dérivée de** $h(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

   h est de la forme $u(x)v(x)$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^{\frac{1}{x}}$. On a $u'(x) = 1$.

   Pour dériver $v(x) = e^{\frac{1}{x}}$, on utilise la formule de dérivation de e^w qui est $w'e^w$. Ici, $w(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$. Sa dérivée est $w'(x) = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$. Donc, $v'(x) = -\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.

   On utilise la formule de dérivation d'un produit $(uv)' = u'v + uv'$.

   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

   $$h'(x) = (1) \times \left(e^{\frac{1}{x}}\right) + (x) \times \left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)$$

   $$h'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{x}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

   $$h'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$$

On factorise par $e^{\frac{1}{x}}$ pour obtenir une forme plus simple :

$$\boxed{h'(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$$

Exercice 2

On considère la fonction g définie sur $[-4\,;\,4]$ par $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$. On note g sa courbe représentative.

1. **Variations de g sur $[-4\,;\,4]$**

   La fonction g est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur $[-4\,;\,4]$. Calculons sa dérivée :

   $$g'(x) = -3x^2 + 3 \times 2x - 0 = -3x^2 + 6x$$

   Étudions le signe de $g'(x)$. C'est un polynôme du second degré. Cherchons ses racines :

   $$g'(x) = 0 \iff -3x^2 + 6x = 0 \iff -3x(x-2) = 0$$

   Les racines sont $x = 0$ et $x = 2$. Ces deux racines sont dans l'intervalle $[-4\,;\,4]$. Le coefficient dominant de $g'(x)$ est -3, qui est négatif. La parabole représentant $g'(x)$ est donc tournée vers le bas. Ainsi, $g'(x)$ est négatif à l'extérieur des racines et positif entre les racines.

   Calculons les valeurs aux bornes et aux points critiques :

   - $g(-4) = -(-4)^3 + 3(-4)^2 - 1 = -(-64) + 3(16) - 1 = 64 + 48 - 1 = 111$
   - $g(0) = -(0)^3 + 3(0)^2 - 1 = -1$
   - $g(2) = -(2)^3 + 3(2)^2 - 1 = -8 + 3(4) - 1 = -8 + 12 - 1 = 3$
   - $g(4) = -(4)^3 + 3(4)^2 - 1 = -64 + 3(16) - 1 = -64 + 48 - 1 = -17$

x	-4		0		2		4
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	111	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-17

2. **Équation de la tangente à g au point d'abscisse 1**

   L'équation de la tangente à g au point d'abscisse a est donnée par la formule : $y = g'(a)(x-a) + g(a)$. Ici, $a = 1$. Calculons $g(1)$ et $g'(1)$:

   - $g(1) = -(1)^3 + 3(1)^2 - 1 = -1 + 3 - 1 = 1$
   - $g'(1) = -3(1)^2 + 6(1) = -3 + 6 = 3$

L'équation de la tangente est donc :

$$y = 3(x-1)+1$$

$$y = 3x - 3 + 1$$

$$\boxed{y = 3x - 2}$$

3. **Convexité de g et point d'inflexion**

La convexité de g est déterminée par le signe de sa dérivée seconde $g''(x)$. g est une fonction polynôme, elle est donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculons $g''(x)$ en dérivant $g'(x) = -3x^2 + 6x$:

$$g''(x) = -3 \times 2x + 6 = -6x + 6$$

Étudions le signe de $g''(x)$:

$$g''(x) = 0 \iff -6x + 6 = 0 \iff 6 = 6x \iff x = 1$$

Comme le coefficient directeur de $g''(x)$ (qui est une fonction affine) est $-6 < 0$, la fonction $g''(x)$ est positive avant $x = 1$ et négative après $x = 1$.

x	-4		1		4
$g''(x)$		$+$	0	$-$	
Convexité		Convexe ($\cup$)	Pt d'inflexion	Concave ($\cap$)	

La fonction g est convexe sur $[-4\,;\,1]$ et concave sur $[1\,;\,4]$. La dérivée seconde $g''(x)$ s'annule et change de signe en $x = 1$. Donc, la courbe g admet un point d'inflexion au point d'abscisse $x = 1$. L'ordonnée de ce point est $g(1) = 1$. Le point d'inflexion a pour coordonnées $\boxed{(1\,;\,1)}$.

4. **Signe de la fonction** $h(x) = g(x) - (3x - 2)$

On reconnaît dans l'expression $3x - 2$ l'équation de la tangente T à g au point d'abscisse 1, trouvée à la question 2. Ainsi, $h(x) = g(x) - y_T$, où $y_T = 3x - 2$. Le signe de $h(x)$ correspond donc à la position relative de la courbe g par rapport à sa tangente T au point d'abscisse 1 (qui est aussi le point d'inflexion).

Le signe de $h(x)$ est lié à la convexité de g par rapport à sa tangente au point d'inflexion :

- Sur $[-4\,;\,1]$, g est convexe, donc g est au-dessus de ses tangentes (sauf au point de tangence). En particulier, pour $x \neq 1$, $g(x) > 3x - 2$. Donc $\boxed{h(x) \geq 0 \text{ sur } [-4\,;\,1]}$ (avec égalité seulement en $x = 1$).

- Sur $[1\,;\,4]$, g est concave, donc g est en-dessous de ses tangentes (sauf au point de tangence). En particulier, pour $x \neq 1$, $g(x) < 3x - 2$. Donc $\boxed{h(x) \leq 0 \text{ sur } [1\,;\,4]}$ (avec égalité seulement en $x = 1$).

La fonction $h(x)$ s'annule uniquement en $x = 1$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 10x^2e^{ax-1}$ où $a \in \mathbb{R}$. On note f sa courbe représentative. On s'intéresse aux points d'inflexion de f.

La fonction f est le produit d'une fonction polynôme ($x \mapsto 10x^2$) et d'une fonction exponentielle composée avec une fonction affine ($x \mapsto e^{ax-1}$). Ces fonctions sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

Les points d'inflexion sont les points où la dérivée seconde $f''(x)$ s'annule en changeant de signe. Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$.

Calcul de $f'(x)$ (règle du produit $(uv)' = u'v + uv'$) : Soit $u(x) = 10x^2$ et $v(x) = e^{ax-1}$. Alors $u'(x) = 20x$ et $v'(x) = ae^{ax-1}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (20x)(e^{ax-1}) + (10x^2)(ae^{ax-1}) \\ &= 10xe^{ax-1}(2 + ax) \end{aligned}$$

Calcul de $f''(x)$ (règle du produit $(UV)' = U'V + UV'$ avec $U(x) = 10x(2 + ax) = 20x + 10ax^2$ et $V(x) = e^{ax-1}$) : $U'(x) = 20 + 20ax$. $V'(x) = ae^{ax-1}$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= (20 + 20ax)(e^{ax-1}) + (20x + 10ax^2)(ae^{ax-1}) \\ &= e^{ax-1}[(20 + 20ax) + a(20x + 10ax^2)] \\ &= e^{ax-1}[20 + 20ax + 20ax + 10a^2x^2] \\ &= e^{ax-1}[10a^2x^2 + 40ax + 20] \\ &= 10e^{ax-1}[a^2x^2 + 4ax + 2] \end{aligned}$$

Le signe de $f''(x)$ dépend du signe du polynôme du second degré $P(x) = a^2x^2 + 4ax + 2$, car $10e^{ax-1}$ est toujours strictement positif (l'exponentielle est toujours positive).

1. **Cas où $a \neq 0$**

   On étudie le signe du polynôme $P(x) = a^2x^2 + 4ax + 2$. C'est un polynôme du second degré en x. Son coefficient dominant est a^2. Comme $a \neq 0$, $a^2 > 0$. Calculons son discriminant Δ :

   $$\Delta = (4a)^2 - 4(a^2)(2) = 16a^2 - 8a^2 = 8a^2$$

   Puisque $a \neq 0$, on a $a^2 > 0$, et donc $\Delta = 8a^2 > 0$.

   Le polynôme $P(x)$ a donc deux racines réelles distinctes. Notons-les x_1 et x_2. Comme $P(x)$ est un polynôme du second degré avec un discriminant strictement positif et un coefficient dominant (a^2) positif, $P(x)$ est positif à l'extérieur des racines et négatif entre les racines. Puisque le signe de $f''(x)$ est le même que celui de $P(x)$, $f''(x)$ s'annule et change de signe en x_1 et en x_2.

Par conséquent, la courbe f admet exactement deux points d'inflexion lorsque $a \neq 0$.

2. **Cas où** $a = 0$

   Si $a = 0$, l'expression de la fonction f devient :

   $$f(x) = 10x^2e^{0\cdot x-1} = 10x^2e^{-1} = \frac{10}{e}x^2$$

   C'est une fonction polynôme du second degré (une parabole). Calculons sa dérivée seconde :

   $$f'(x) = \frac{10}{e}(2x) = \frac{20}{e}x$$

   $$f''(x) = \frac{20}{e}$$

   Comme $e \approx 2.718 > 0$, la dérivée seconde $f''(x) = \frac{20}{e}$ est une constante strictement positive. $f''(x)$ ne s'annule jamais et est toujours positive.

   La fonction f est donc strictement convexe sur $\mathbb{R}$. Il n'y a pas de changement de signe de $f''(x)$, donc la courbe f n'admet aucun point d'inflexion lorsque $a = 0$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = (2-x)\sqrt{4-x^2}$ et (C) sa courbe représentative.

1. **Ensemble de définition de** f

   La fonction f est définie si et seulement si l'expression sous la racine carrée est positive ou nulle. Condition : $4 - x^2 \geq 0$. Étudions le signe du polynôme $P(x) = 4 - x^2$. Les racines sont $x = -2$ et $x = 2$. Le coefficient de x^2 est $-1 < 0$, la parabole est tournée vers le bas. Donc $4 - x^2 \geq 0$ pour x entre les racines (incluses). L'ensemble de définition de f est $\boxed{D_f = [-2\,;\,2]}$.

2. **Dérivabilité et dérivée**

   a) **Justification de la dérivabilité sur** $]-2\,;\,2[$

      La fonction f est le produit de deux fonctions :

      - $u : x \mapsto 2 - x$, fonction affine, dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $]-2\,;\,2[$.
      - $v : x \mapsto \sqrt{4-x^2}$. C'est la composée de la fonction $w : x \mapsto 4 - x^2$ (polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$) suivie de la fonction racine carrée $t \mapsto \sqrt{t}$ (dérivable sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$).

      La fonction v est dérivable là où $w(x) > 0$. $w(x) > 0 \iff 4 - x^2 > 0 \iff x \in]-2\,;\,2[$. Donc, la fonction v est dérivable sur $]-2\,;\,2[$.

Comme produit de deux fonctions dérivables sur $]-2\,;\,2[$, la fonction $f = u \times v$ est dérivable sur $]-2\,;\,2[$.

b) **Calcul de $f'(x)$ et étude de son signe**

On utilise la formule de dérivation d'un produit $(uv)' = u'v+uv'$. Avec $u(x) = 2-x \implies u'(x) = -1$. Avec $v(x) = \sqrt{4-x^2} \implies v'(x) = \dfrac{w'(x)}{2\sqrt{w(x)}} = \dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$.

Pour $x \in]-2\,;\,2[$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\
&= (-1)\sqrt{4-x^2} + (2-x)\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right) \\
&= \frac{-\sqrt{4-x^2} \times \sqrt{4-x^2} - x(2-x)}{\sqrt{4-x^2}} \\
&= \frac{-(4-x^2) - 2x + x^2}{\sqrt{4-x^2}} \\
&= \frac{-4 + x^2 - 2x + x^2}{\sqrt{4-x^2}} \\
&= \frac{2x^2 - 2x - 4}{\sqrt{4-x^2}} \\
&= \frac{2(x^2 - x - 2)}{\sqrt{4-x^2}}
\end{aligned}$$

Sur l'intervalle $]-2\,;\,2[$, le dénominateur $\sqrt{4-x^2}$ est strictement positif. Le facteur 2 au numérateur est positif. Le signe de $f'(x)$ sur $]-2\,;\,2[$ est donc le même que le signe du polynôme $\boxed{P(x) = x^2 - x - 2}$.

3. **Dérivabilité en $x = -2$ et $x = 2$**

Pour étudier la dérivabilité aux bornes, on calcule la limite du taux d'accroissement. On a $f(-2) = (2-(-2))\sqrt{4-(-2)^2} = 4 \times \sqrt{0} = 0$. On a $f(2) = (2-2)\sqrt{4-2^2} = 0 \times \sqrt{0} = 0$.

<u>En $x = -2$:</u> On étudie la limite quand $x \to -2^+$ (car $D_f = [-2, 2]$).

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-2^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x-(-2)} &= \lim_{x\to-2^+} \frac{(2-x)\sqrt{4-x^2}}{x+2} \\
&= \lim_{x\to-2^+} \frac{(2-x)\sqrt{(2-x)(2+x)}}{x+2} \\
&= \lim_{x\to-2^+} \frac{(2-x)\sqrt{2-x}\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}\sqrt{x+2}} \quad (\text{car } x+2>0 \text{ quand } x\to-2^+) \\
&= \lim_{x\to-2^+} \frac{(2-x)\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+2}} = \lim_{x\to-2^+} \frac{(2-x)^{3/2}}{\sqrt{x+2}}
\end{aligned}$$

Quand $x \to -2^+$, le numérateur tend vers $(2-(-2))^{3/2} = 4^{3/2} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$. Quand $x \to -2^+$, le dénominateur $\sqrt{x+2}$ tend vers $\sqrt{0^+} = 0^+$. La limite est donc $\dfrac{8}{0^+} = +\infty$. La fonction f n'est pas dérivable en $x = -2$.

En $x = 2$: On étudie la limite quand $x \to 2^-$ (car $D_f = [-2, 2]$).

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \to 2^-} \frac{(2-x)\sqrt{4-x^2}}{x-2} \\
&= \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x-2)\sqrt{(2-x)(2+x)}}{x-2} \\
&= \lim_{x \to 2^-} -\sqrt{(2-x)(2+x)} \\
&= -\sqrt{(2-2)(2+2)} = -\sqrt{0 \times 4} = -\sqrt{0} = 0
\end{aligned}$$

La limite est finie et vaut 0. La fonction f est dérivable en $x = 2$, et $f'(2) = 0$.

Interprétation graphique :

- En $x = -2$, la limite du taux d'accroissement est $+\infty$. La courbe f admet une **demi-tangente verticale** dirigée vers le haut au point d'abscisse -2 (le point $(-2, 0)$).
- En $x = 2$, la limite du taux d'accroissement est 0. La courbe f admet une **demi-tangente horizontale** au point d'abscisse 2 (le point $(2, 0)$).

4. **Tableau de variations de f**

Le signe de $f'(x)$ sur $]-2\,;\,2[$ est celui de $P(x) = x^2 - x - 2$. Calculons le discriminant de $P(x)$: $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-2) = 1 + 8 = 9 = 3^2$. Les racines sont $x_1 = \frac{-(-1)-3}{2(1)} = \frac{1-3}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$. Le polynôme $P(x)$ est du signe de $a = 1$ (positif) à l'extérieur des racines et négatif entre les racines. Sur $D_f = [-2\,;\,2]$, les racines pertinentes sont $x = -1$ et $x = 2$. Donc, $P(x) \geq 0$ sur $[-2\,;\,-1]$ et $P(x) \leq 0$ sur $[-1\,;\,2]$. Par conséquent, $f'(x) \geq 0$ sur $]-2\,;\,-1]$ et $f'(x) \leq 0$ sur $[-1\,;\,2[$.

Calculons la valeur au maximum local $x = -1$: $f(-1) = (2-(-1))\sqrt{4-(-1)^2} = (3)\sqrt{4-1} = 3\sqrt{3}$.

x	-2		-1		2
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	↗	$3\sqrt{3}$	↘	0