Exercice 1 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.

Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte.

Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Les quatre questions sont indépendantes.

1. Supposons que pour un entier $n \geq 2,$ la propriété $P(n)$: $"5^n \geq 4^n + 3^n"$ soit vraie. Montrons que $P(n+1)$: $"$ est vraie.

   Compléter les pointillés par :

   a. $5^n \geq 4^{n+1} + 3^{n+1}$
   b. $5^{n+1} \geq 4^{n+1} + 3^{n+1}$
   c. $5^{n+1} \geq 4^n + 3^n$

2. Si une propriété $P(n)$ est vraie pour $n = 3$ et est héréditaire à partir de $n = 6$, alors :

   a. elle est vraie pour tout $n \geq 3,$
   b. elle est vraie pour tout $n \geq 6.$
   c. on ne peut rien conclure.

3. Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété, "$n^2 + 3$ est un multiple de 3".

   a. $P(0)$ est vraie.
   b. $P(1)$ est vraie.
   c. Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est vraie.

4. ((u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n + 2$

   Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la propriété : "$u_n = 2 \times 3^n - 1$"

   On suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie.

   a. $P(k+1)$ est la propriété : "$u_{k+1} = 2 \times 3^k - 1"$.
   b. $P(k+1)$ est vraie.
   c. la propriété n'est pas héréditaire.

Exercice 2 :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 8$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = 0,2u_n + 4$

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $5 < u_n \leq 8$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) est décroissante.
3. a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 3(0,2)^n + 5$
   b) Écrire une fonction en python qui calcule u_N pour un N de $\mathbb{N}$ quelconque.
   c) Écrire le programme employant cette fonction.

Exercice 3 :

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a :

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$