

Exercice 1

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère :

- les points $A(0; 1; 1)$ et $B(-2; 2; -1)$.
- la droite D de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$$

1. Représentation paramétrique de la droite (AB)

La droite (AB) passe par le point $A(0; 1; 1)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Calculons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 0 \\ 2 - 1 \\ -1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Un point $M(x; y; z)$ appartient à la droite (AB) si et seulement s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$. Cette condition vectorielle se traduit par le système d'équations suivant :

$$\begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 1 \\ z - 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = -2k \\ y - 1 = k \\ z - 1 = -2k \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2k \\ y = 1 + k \\ z = 1 - 2k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Réponse : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est, par exemple,

$$\begin{cases} x = -2k \\ y = 1 + k \\ z = 1 - 2k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

(En utilisant le point A et le vecteur $\overrightarrow{AB}$. D'autres représentations sont possibles.)

2. (a) Montrer que (AB) et D ne sont pas parallèles

Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\vec{u}_{AB} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de la droite D est $\vec{u}_D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (obtenu à partir des coefficients du paramètre t). Les droites (AB) et D sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs

$\vec{u}_{AB}$ et $\vec{u}_D$ sont colinéaires. Cherchons s'il existe un réel λ tel que $\vec{u}_{AB} = \lambda \vec{u}_D$.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2 = \lambda \times 1 & \Rightarrow \lambda = -2 \\ 1 = \lambda \times 1 & \Rightarrow \lambda = 1 \\ -2 = \lambda \times (-1) & \Rightarrow \lambda = 2 \end{cases}$$

Les valeurs obtenues pour λ ($-2, 1$ et 2) sont différentes. Il n'existe donc pas de réel λ unique vérifiant ces trois conditions. Les vecteurs $\vec{u}_{AB}$ et $\vec{u}_D$ ne sont pas colinéaires. **Conclusion :**

Les droites (AB) et D ne sont pas parallèles.

(b) **Montrer que (AB) et D ne sont pas sécantes**

Les droites (AB) et D sont sécantes s'il existe un point commun, c'est-à-dire s'il existe un réel k (pour (AB)) et un réel t (pour D) tels que les coordonnées soient identiques. Représentation de (AB) : $x = -2k, y = 1 + k, z = 1 - 2k$. Représentation de D : $x = -2 + t, y = 1 + t, z = -1 - t$. On résout le système :

$$\begin{cases} -2k = -2 + t & (L1) \\ 1 + k = 1 + t & (L2) \\ 1 - 2k = -1 - t & (L3) \end{cases}$$

De l'équation (L2), en simplifiant par 1, on obtient directement $k = t$. Substituons $t = k$ dans l'équation (L1) : $-2k = -2 + k \implies -3k = -2 \implies k = \frac{2}{3}$. Puisque $t = k$, on a aussi $t = \frac{2}{3}$. Vérifions si ces valeurs ($k = 2/3$ et $t = 2/3$) satisfont la troisième équation (L3) :

Membre de gauche : $1 - 2k = 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right) = 1 - \frac{4}{3} = \frac{3-4}{3} = -\frac{1}{3}$.

Membre de droite : $-1 - t = -1 - \frac{2}{3} = -\frac{3}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3}$. Comme $-\frac{1}{3} \neq -\frac{5}{3}$, l'équation (L3) n'est pas vérifiée. Le système n'admet pas de solution. **Conclusion : Les droites (AB) et D ne sont pas sécantes.**

(Puisqu'elles ne sont ni parallèles ni sécantes, elles sont non coplanaires.)

Dans la suite la lettre u désigne un nombre réel. On considère le point M de la droite D de coordonnées $M(-2 + u; 1 + u; -1 - u)$.

3. **Vérifier que le plan $P : x + y - z - 3u = 0$ est orthogonal à D et passe par M**

Un vecteur normal au plan P est $\vec{n}_P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (coefficients de x, y, z).

Un vecteur directeur de D est $\vec{u}_D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (coefficients de t). Puisque $\vec{n}_P = \vec{u}_D$, le vecteur direc-

teur de D est normal à P . **Donc, la droite D est orthogonale au plan P .** Le point $M(-2+u; 1+u; -1-u)$ appartient à P si ses coordonnées vérifient l'équation de P : $x_M + y_M - z_M - 3u = (-2+u) + (1+u) - (-1-u) - 3u$

$$= -2 + u + 1 + u + 1 + u - 3u = (-2 + 1 + 1) + (u + u + u - 3u) = 0 + 0 = 0.$$

L'équation est vérifiée. **Donc, le point M appartient au plan P .**

4. **Montrer que P et (AB) sont sécants en $N(-4+6u; 3-3u; -1)$**

Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Un vecteur normal à P est $\vec{n}_P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_P$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_P = (-2)(1) + (1)(1) + (-2)(-1) = -2 + 1 + 2 = 1$$

Comme $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_P = 1 \neq 0$, la droite (AB) n'est pas orthogonale au vecteur normal $\vec{n}_P$, ce qui signifie que (AB) n'est pas parallèle au plan P . La droite (AB) est donc sécante au plan P . Pour que le point $N(-4+6u; 3-3u; -1)$ soit le point d'intersection, il doit appartenir à la fois à (AB) et à P . Appartenance de N à P : Ses coordonnées doivent vérifier $x_N + y_N - z_N - 3u = 0$. $(-4+6u) + (3-3u) - (-1) - 3u = -4+6u+3-3u+1-3u = (-4+3+1) + (6u-3u-3u) = 0+0 = 0$. Donc N appartient à P pour tout u . Appartenance de N à (AB) : Il doit exister un réel k tel que :

$$\begin{cases} -4 + 6u = -2k & (L1') \\ 3 - 3u = 1 + k & (L2') \\ -1 = 1 - 2k & (L3') \end{cases}$$

De $(L3')$: $2k = 1 - (-1) = 2 \implies k = 1$. Substituons $k = 1$ dans $(L1')$: $-4 + 6u = -2(1) \implies$

$-4 + 6u = -2 \implies 6u = 2 \implies u = 2/6 = 1/3$. Substituons $k = 1$ dans $(L2')$: $3 - 3u =$

$1 + 1 \implies 3 - 3u = 2 \implies -3u = -1 \implies u = 1/3$. Les deux équations donnent $u = 1/3$ pour

$k = 1$. **Conclusion : Le point $N(-4+6u; 3-3u; -1)$ est le point d'intersection de (AB) et P si et seulement si $u = 1/3$. Dans ce cas, $N(-2; 2; -1)$, qui est le point B .** (Note : Il y a une subtilité dans l'énoncé ici. Si la question implique que N est le point d'intersection pour *tout* u , alors les coordonnées de N devraient être exprimées différemment, comme calculé précédemment : $N(-6u; 1+3u; 1-6u)$. On continue en utilisant les coordonnées de N données dans l'énoncé, ce qui implique $u = 1/3$ pour que N soit sur (AB) .)

5. (a) **Montrer que (MN) est perpendiculaire à D**

Nous utilisons les coordonnées de $M(-2+u; 1+u; -1-u)$ et $N(-4+6u; 3-3u; -1)$.

Calculons $\overrightarrow{MN}$:

$$\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} (-4 + 6u) - (-2 + u) \\ (3 - 3u) - (1 + u) \\ -1 - (-1 - u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 5u \\ 2 - 4u \\ u \end{pmatrix}$$

Un vecteur directeur de D est $\vec{u}_D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. La droite (MN) est perpendiculaire à D si $\overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_D = 0$.

$$\vec{u}_D = 0. \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_D = (-2 + 5u)(1) + (2 - 4u)(1) + (u)(-1)$$

$$= -2 + 5u + 2 - 4u - u = (-2 + 2) + (5u - 4u - u) = 0 + 0 = 0.$$

Le produit scalaire est nul. **Conclusion : La droite (MN) est perpendiculaire à la droite D .**

(b) Existe-t-il une valeur de u pour laquelle $(MN) \perp (AB)$?

Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. La droite (MN) est perpendiculaire à (AB)

$$\text{si } \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0. \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = (-2 + 5u)(-2) + (2 - 4u)(1) + (u)(-2) = 0$$

$$4 - 10u + 2 - 4u - 2u = 0$$

$$6 - 16u = 0 \implies 16u = 6 \implies u = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}. \text{ Conclusion : Oui, la droite } (MN) \text{ est perpendiculaire à la droite } (AB) \text{ pour } u = \frac{3}{8}.$$

6. (a) Exprimer MN^2 en fonction de u

$$\begin{aligned} \text{On a } \overrightarrow{MN} &= \begin{pmatrix} -2 + 5u \\ 2 - 4u \\ u \end{pmatrix}. MN^2 = \|\overrightarrow{MN}\|^2 = (-2 + 5u)^2 + (2 - 4u)^2 + u^2 \\ &= (4 - 20u + 25u^2) + (4 - 16u + 16u^2) + u^2 \\ &= (25u^2 + 16u^2 + u^2) + (-20u - 16u) + (4 + 4) \\ &= \boxed{42u^2 - 36u + 8}. \end{aligned}$$

(b) Valeur de u pour laquelle la distance MN est minimale

Minimiser la distance MN (qui est positive) revient à minimiser son carré MN^2 . Soit la fonction $f(u) = MN^2 = 42u^2 - 36u + 8$. C'est un polynôme du second degré en u , de la forme $au^2 + bu + c$ avec $a = 42, b = -36, c = 8$. Comme $a = 42 > 0$, la parabole représentant $f(u)$ est tournée vers le haut et admet un minimum. Ce minimum est atteint pour $u_0 = -\frac{b}{2a}$.

$$u_0 = -\frac{-36}{2 \times 42} = \frac{36}{84}. \text{ Simplifions la fraction : } \frac{36}{84} = \frac{18}{42} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}. \text{ Conclusion : La distance}$$

$$MN \text{ est minimale pour } u = \frac{3}{7}.$$

Exercice 2

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ où l'on considère :

- les points $A(2; -1; 0)$, $B(1; 0; -3)$, $C(6; 6; 1)$ et $E(1; 2; 4)$;
- Le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x - y - z + 4 = 0$.

1. (a) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A

Pour démontrer que le triangle ABC est rectangle en A , nous allons calculer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2 \\ 0 - (-1) \\ -3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 2 \\ 6 - (-1) \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Calcul du produit scalaire :}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1)(4) + (1)(7) + (-3)(1)$$

$$= -4 + 7 - 3$$

$$= 0. \text{ Puisque le produit scalaire } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \text{ est nul, les vecteurs } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont orthogonaux.}$$

Conclusion : Le triangle ABC est rectangle en A .

(b) Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ puis les longueurs BA et BC

Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \\ z_C - z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 1 \\ 6 - 0 \\ 1 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}. \text{ Produit scalaire } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} :$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (1)(5) + (-1)(6) + (3)(4)$$

$$= 5 - 6 + 12 = 11. \text{ Longueur } BA :$$

$$BA = \|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{1 + 1 + 9} = \sqrt{11}.$$

$$BA = \sqrt{11}. \text{ Longueur } BC :$$

$$BC = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(5)^2 + (6)^2 + (4)^2} = \sqrt{25 + 36 + 16} = \sqrt{77}.$$

$$BC = \sqrt{77}.$$

(c) En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré

On utilise la formule du produit scalaire : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos(\widehat{ABC})$. D'où $\cos(\widehat{ABC}) =$

$$\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{BA \times BC}.$$

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{11}{\sqrt{11} \times \sqrt{77}} = \frac{11}{\sqrt{11} \times \sqrt{7 \times 11}} = \frac{11}{\sqrt{11 \times 7 \times 11}} = \frac{11}{11\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

Calcul de l'angle : $\widehat{ABC} = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$. À la calculatrice, $\frac{1}{\sqrt{7}} \approx 0.37796...$ $\widehat{ABC} \approx \arccos(0.37796...) \approx 67.79^\circ$. **Conclusion : La mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré est 68° .**

2. (a) **Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (ABC)**

Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x - y - z + 4 = 0$ est $\vec{n}_{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Un vecteur

normal au plan (ABC) est un vecteur orthogonal aux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ (qui dirigent le plan (ABC)). Soit $\vec{n}_{ABC} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un tel vecteur. On doit avoir :

$\vec{n}_{ABC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \implies -a + b - 3c = 0$ (S1) $\vec{n}_{ABC} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \implies 4a + 7b + c = 0$ (S2) Fixons par exemple $c = 1$ (si $c = 0$, on peut trouver une solution non nulle pour a, b si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, ce qui est le cas). (S1) $\implies -a + b = 3 \implies b = a + 3$. Substituons dans (S2) : $4a + 7(a + 3) + 1 = 0 \implies 4a + 7a + 21 + 1 = 0 \implies 11a = -22 \implies a = -2$.

Alors $b = -2 + 3 = 1$. Un vecteur normal au plan (ABC) est $\vec{n}_{ABC} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Comparons $\vec{n}_{\mathcal{P}}$

et $\vec{n}_{ABC}$. On a $\vec{n}_{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_{ABC} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On remarque que $\vec{n}_{\mathcal{P}} = -1 \times \vec{n}_{ABC}$. Les vecteurs normaux $\vec{n}_{\mathcal{P}}$ et $\vec{n}_{ABC}$ sont colinéaires. **Conclusion : Le plan $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (ABC) .**

(b) **En déduire une équation cartésienne du plan (ABC)**

Puisque le plan (ABC) est parallèle au plan $\mathcal{P}$ (d'équation $2x - y - z + 4 = 0$), une équation cartésienne de (ABC) sera de la forme $2x - y - z + d = 0$. Le point $A(2; -1; 0)$ appartient au plan (ABC) . Ses coordonnées doivent donc vérifier l'équation du plan : $2(2) - (-1) - (0) + d = 0$ $4 + 1 - 0 + d = 0$ $5 + d = 0 \implies d = -5$. **Conclusion : Une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y - z - 5 = 0$.**

(c) **Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (ABC) et passant par le point E**

La droite Δ est orthogonale au plan (ABC) . Un vecteur directeur de Δ est donc un vecteur normal au plan (ABC) . Nous pouvons utiliser $\vec{n}_{ABC} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $\vec{n}_P \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Prenons $\vec{n}_P$ pour simplifier les signes. Soit $\vec{u}_\Delta = \vec{n}_P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. La droite Δ passe par le point $E(1; 2; 4)$.

Une représentation paramétrique de Δ est donnée par : $M(x, y, z) \in \Delta \iff \overrightarrow{EM} = k\vec{u}_\Delta$ pour un réel k .

$$\begin{cases} x - 1 = 2k \\ y - 2 = -1k \\ z - 4 = -1k \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2 - k \\ z = 4 - k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Réponse : Une représentation paramétrique de la droite Δ est

$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2 - k \\ z = 4 - k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

- (d) (*) **Démontrer que le projeté orthogonal H du point E sur le plan (ABC) a pour coordonnées $\left(4; \frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$**

Le point H est le point d'intersection de la droite Δ (orthogonale à (ABC) passant par E) et du plan (ABC) . Les coordonnées de H doivent vérifier la représentation paramétrique de Δ et l'équation cartésienne de (ABC) . Équation de (ABC) : $2x - y - z - 5 = 0$. Coordonnées d'un point de Δ : $x = 1 + 2k, y = 2 - k, z = 4 - k$. Substituons dans l'équation du plan : $2(1 + 2k) - (2 - k) - (4 - k) - 5 = 0 \implies 2 + 4k - 2 + k - 4 + k - 5 = 0 \implies (2 - 2 - 4 - 5) + (4k + k + k) = 0 \implies -9 + 6k = 0 \implies 6k = 9 \implies k = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$. Maintenant, calculons les coordonnées de H en utilisant $k = 3/2$ dans la représentation paramétrique de Δ :

$$x_H = 1 + 2\left(\frac{3}{2}\right) = 1 + 3 = 4.$$

$$y_H = 2 - \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{2} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$z_H = 4 - \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{8}{2} - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}. \quad \textbf{Conclusion : Les coordonnées du projeté orthogonal } H \textbf{ sont}$$

$$\left(4; \frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right), \text{ ce qui correspond bien à l'énoncé.}$$

3. (*) Volume de la pyramide $ABCE$

On rappelle que $V = \frac{1}{3}Bh$. Ici, la base est le triangle ABC et la hauteur h est la distance EH (distance du point E au plan (ABC)). Calcul de l'aire B du triangle ABC :

Le triangle ABC est rectangle en A . Son aire est $B = \frac{1}{2} \times AB \times AC$. $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 1 + 9} = \sqrt{11}$. $AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{4^2 + 7^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 49 + 1} = \sqrt{66}$. $B = \frac{1}{2} \times \sqrt{11} \times \sqrt{66} =$

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{11 \times 6 \times 11} = \frac{1}{2} \times \sqrt{11^2 \times 6} = \frac{1}{2} \times 11\sqrt{6}.$$

L'aire du triangle ABC est $\mathcal{B} = \frac{11\sqrt{6}}{2}$ unités d'aire. Calcul de la hauteur $h = EH$:

$$E(1; 2; 4) \text{ et } H\left(4; \frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right). h = EH = \sqrt{(x_H - x_E)^2 + (y_H - y_E)^2 + (z_H - z_E)^2}$$

$$h = \sqrt{(4 - 1)^2 + \left(\frac{1}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 4\right)^2}$$

$$h = \sqrt{(3)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$h = \sqrt{9 + \frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{9 + \frac{18}{4}} = \sqrt{9 + \frac{9}{2}} = \sqrt{\frac{18 + 9}{2}} = \sqrt{\frac{27}{2}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{3}\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

La hauteur $h = EH = \frac{3\sqrt{6}}{2}$. Calcul du volume V de la pyramide $ABCE$:

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h = \frac{1}{3} \times \left(\frac{11\sqrt{6}}{2}\right) \times \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)$$

$$V = \frac{1 \times 11\sqrt{6} \times 3\sqrt{6}}{3 \times 2 \times 2} = \frac{11 \times 3 \times (\sqrt{6})^2}{3 \times 4} = \frac{11 \times 3 \times 6}{3 \times 4} = \frac{11 \times 6}{4} = \frac{66}{4} = \frac{33}{2} = 16,5. \text{ Conclu-}$$

sion : Le volume de la pyramide $ABCE$ est égal à $\boxed{16,5}$ unités de volume.

Exercice 3

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points suivants : $A(0; 3; -1)$, $B(4; 1; 2)$, $C(3; -1; 7)$ et $D(0; 6; 6)$.

1. Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés

Pour cela, nous allons vérifier si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Calcul des coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 0 \\ 1 - 3 \\ 2 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 0 \\ -1 - 3 \\ 7 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}. \text{ Les vecteurs } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires s'il existe}$$

un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$. Cela se traduit par le système :

$$\begin{cases} 3 = k \times 4 & \Rightarrow k = 3/4 \\ -4 = k \times (-2) & \Rightarrow k = (-4)/(-2) = 2 \\ 8 = k \times 3 & \Rightarrow k = 8/3 \end{cases}$$

Les valeurs obtenues pour k ($3/4$, 2 , et $8/3$) sont différentes. Il n'existe donc pas un tel réel k .

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. **Conclusion : Les points A, B et C ne sont pas alignés.**

2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C puis calculer son aire

Pour démontrer que le triangle ABC est rectangle en C , nous calculons le produit scalaire $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$. Coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} x_A - x_C \\ y_A - y_C \\ z_A - z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 3 \\ 3 - (-1) \\ -1 - 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} x_B - x_C \\ y_B - y_C \\ z_B - z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 3 \\ 1 - (-1) \\ 2 - 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Produit scalaire : $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (-3)(1) + (4)(2) + (-8)(-5) = -3 + 8 + 40 = 45$. Puisque $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 45 \neq 0$,

le triangle ABC n'est pas rectangle en C avec les coordonnées données. **Note : Il y a une incohérence dans l'énoncé. Avec les points fournis, le triangle ABC n'est pas rectangle en C .** Calcul de l'aire du triangle ABC (en utilisant les points donnés) :

Puisque le triangle n'est pas rectangle en C comme demandé, nous ne pouvons pas utiliser la formule simple $\frac{1}{2}CA \times CB$ (sauf si l'angle en C était droit). Calculons les longueurs : $CA = \|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-8)^2} = \sqrt{9 + 16 + 64} = \sqrt{89}$. $CB = \|\overrightarrow{CB}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{1 + 4 + 25} = \sqrt{30}$. Nous avons $\cos(\widehat{ACB}) = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{CA \times CB} = \frac{45}{\sqrt{89}\sqrt{30}} = \frac{45}{\sqrt{2670}}$. Ensuite, $\sin^2(\widehat{ACB}) = 1 - \cos^2(\widehat{ACB}) = 1 - \frac{45^2}{2670} = 1 - \frac{2025}{2670} = \frac{2670 - 2025}{2670} = \frac{645}{2670}$. Donc $\sin(\widehat{ACB}) = \sqrt{\frac{645}{2670}}$ (puisque l'angle est géométrique, son sinus est positif). L'aire $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}CA \times CB \times \sin(\widehat{ACB})$ $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{89}\sqrt{30}\sqrt{\frac{645}{2670}} = \frac{1}{2}\sqrt{2670 \times \frac{645}{2670}} = \frac{1}{2}\sqrt{645}$. **Conclusion : Avec les**

points donnés, le triangle ABC n'est pas rectangle en C . Son aire est $\frac{\sqrt{645}}{2}$ unités d'aire.

(Si l'énoncé avait été correct et le triangle rectangle en C , l'aire aurait été $\frac{1}{2}CA \times CB$.)

3. Soit $\vec{n}(1; -1; 2)$ un vecteur de l'espace.

(a) Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal de (ABC)

Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan, par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. On a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = (1)(4) + (-1)(-2) +$

$(2)(3) = 4 + 2 + 6 = 12$. Puisque $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 12 \neq 0$, le vecteur $\vec{n}$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.

Note : Il y a une incohérence dans l'énoncé. Le vecteur $\vec{n}(1; -1; 2)$ n'est pas normal au plan (ABC) défini par les points A, B, C donnés. Pour la suite de l'exercice, nous allons

supposer que $\vec{n}(1; -1; 2)$ est effectivement un vecteur normal au plan (ABC) tel que demandé par l'énoncé, même si cela contredit les points initiaux.

(b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC)

Si $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC) , alors une équation cartésienne de ce plan est de la forme $1x - 1y + 2z + d = 0$. Le point $A(0; 3; -1)$ appartient au plan (ABC) .

Ses coordonnées vérifient donc l'équation : $(0) - (3) + 2(-1) + d = 0 \Rightarrow 0 - 3 - 2 + d = 0 \Rightarrow -5 + d = 0 \Rightarrow d = 5$. **Conclusion (sous l'hypothèse admise à la question 3a) : Une**

équation cartésienne du plan (ABC) est $x - y + 2z + 5 = 0$.

(c) Le point D appartient-il au plan (ABC) ?

Le point D a pour coordonnées $D(0; 6; 6)$. Pour savoir si D appartient au plan (ABC) (d'équation $x - y + 2z + 5 = 0$, sous l'hypothèse précédente), on remplace ses coordonnées dans l'équation : $x_D - y_D + 2z_D + 5 = (0) - (6) + 2(6) + 5 = 0 - 6 + 12 + 5 = 6 + 5 = 11$. Comme $11 \neq 0$, le point D ne vérifie pas l'équation du plan. **Conclusion (sous l'hypothèse**

admise à la question 3a) : Le point D n'appartient pas au plan (ABC) .

4. Soit d la droite orthogonale à (ABC) passant par D .

(a) Donner une représentation paramétrique de d

La droite d est orthogonale au plan (ABC) . Son vecteur directeur est donc un vecteur normal à (ABC) . En utilisant le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (supposé normal d'après 3a). La droite d

passse par le point $D(0; 6; 6)$. Une représentation paramétrique de d est donc :

$$\begin{cases} x = x_D + k \cdot x_{\vec{n}} = 0 + 1k = k \\ y = y_D + k \cdot y_{\vec{n}} = 6 - 1k = 6 - k, \quad k \in \mathbb{R} \\ z = z_D + k \cdot z_{\vec{n}} = 6 + 2k \end{cases}$$

Réponse (sous l'hypothèse admise à la question 3a) :

$$\begin{cases} x = k \\ y = 6 - k, \quad k \in \mathbb{R} \\ z = 6 + 2k \end{cases}$$

(b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection H de la droite d avec le plan (ABC)

Le point H appartient à la droite d , donc ses coordonnées sont de la forme $(k; 6 - k; 6 + 2k)$ pour un certain $k \in \mathbb{R}$. Le point H appartient au plan (ABC) , dont l'équation (sous

hypothèse) est $x - y + 2z + 5 = 0$. On substitue les coordonnées de H dans l'équation du plan : $(k) - (6 - k) + 2(6 + 2k) + 5 = 0$ $k - 6 + k + 12 + 4k + 5 = 0$ $(k + k + 4k) + (-6 + 12 + 5) = 0$ $6k + 11 = 0 \implies 6k = -11 \implies k = -\frac{11}{6}$. On calcule les coordonnées de H avec

$$k = -11/6 :$$

$$x_H = k = -\frac{11}{6}.$$

$$y_H = 6 - k = 6 - \left(-\frac{11}{6}\right) = \frac{36}{6} + \frac{11}{6} = \frac{47}{6}.$$

$$z_H = 6 + 2k = 6 + 2\left(-\frac{11}{6}\right) = 6 - \frac{22}{6} = \frac{36}{6} - \frac{22}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}. \text{ Conclusion (sous l'hypothèse}$$

admise à la question 3a) : Les coordonnées du point H sont $\boxed{H\left(-\frac{11}{6}; \frac{47}{6}; \frac{7}{3}\right)}$.

5. (a) Calculer la valeur exacte de la distance DH

Puisque H est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) et que d est la droite orthogonale au plan passant par D , la distance DH est la distance entre le point D et le plan (ABC) . On peut utiliser la formule de la distance d'un point à un plan, ou calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{DH}$. H est le point de d obtenu pour $k = -11/6$. Le vecteur $\overrightarrow{DH}$ est colinéaire à $\vec{n}$ (avec $k = -11/6$ comme coefficient de proportionnalité par rapport à une origine sur la droite

$$\text{en } D). \overrightarrow{DH} = k\vec{n} = -\frac{11}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11/6 \\ 11/6 \\ -22/6 \end{pmatrix}. \text{ (Attention, ici } k \text{ est le paramètre de la droite,}$$

$\overrightarrow{DH}$ est le vecteur de D à H). La distance DH est la norme du vecteur $\overrightarrow{DH}$. Alternativement, $DH = |k_{\text{paramètre de } H} - k_{\text{paramètre de } D}| \times \|\vec{n}\|$. Le point D correspond à $k = 0$ pour la droite d .

$$\text{Le point } H \text{ correspond à } k_H = -11/6. DH = |k_H - 0| \times \|\vec{n}\| = \left|-\frac{11}{6}\right| \times \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \\ = \frac{11}{6} \times \sqrt{1 + 1 + 4} = \frac{11}{6} \times \sqrt{6} = \frac{11\sqrt{6}}{6}. \text{ Conclusion (sous l'hypothèse admise à la question}$$

3a) : La distance DH est $\boxed{\frac{11\sqrt{6}}{6}}$.

(b) En déduire la valeur exacte du volume du tétraèdre $ABCD$

Le volume d'un tétraèdre $ABCD$ est $V = \frac{1}{3} \times \text{Aire}(\text{base } ABC) \times \text{hauteur } DH$. **Note importante : ** Puisque les questions précédentes (aire de ABC et vecteur normal $\vec{n}$ donc DH) reposent sur des données de l'énoncé qui se sont révélées incohérentes avec les points A, B, C initiaux, il n'est pas possible de fournir une réponse numérique cohérente pour le volume sans résoudre ces incohérences. Si on utilisait l'aire calculée en question 2 ($\mathcal{A}_{ABC} = \frac{\sqrt{645}}{2}$) et la hauteur $DH = \frac{11\sqrt{6}}{6}$ (basée sur l'hypothèse que $\vec{n}$ est normal), le calcul serait : $V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{645}}{2} \times \frac{11\sqrt{6}}{6} = \frac{11\sqrt{645 \times 6}}{36} = \frac{11\sqrt{3870}}{36}$. $\sqrt{3870} = \sqrt{9 \times 430} = 3\sqrt{430}$. $V = \frac{11 \times 3\sqrt{430}}{36} = \frac{11\sqrt{430}}{12}$. Conclusion : En raison des incohérences de l'énoncé, une valeur numérique fiable et cohérente ne peut être donnée. Si on se base sur les résul-

tats précédents (avec les hypothèses faites pour les questions 3 et 4), le volume serait $\frac{11\sqrt{430}}{12}$.

6. Calculer une mesure de l'angle $\widehat{ADB}$ arrondie au degré près

On utilise le produit scalaire $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = DA \times DB \times \cos(\widehat{ADB})$. Coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} x_A - x_D \\ y_A - y_D \\ z_A - z_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 3 - 6 \\ -1 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} x_B - x_D \\ y_B - y_D \\ z_B - z_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 0 \\ 1 - 6 \\ 2 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}. \text{ Produit scalaire :}$$

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = (0)(4) + (-3)(-5) + (-7)(-4) = 0 + 15 + 28 = 43. \text{ Longueurs :}$$

$$DA = \|\overrightarrow{DA}\| = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + (-7)^2} = \sqrt{0 + 9 + 49} = \sqrt{58}.$$

$$DB = \|\overrightarrow{DB}\| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 25 + 16} = \sqrt{57}. \text{ Calcul du cosinus :}$$

$$\cos(\widehat{ADB}) = \frac{\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}}{DA \times DB} = \frac{43}{\sqrt{58} \times \sqrt{57}} = \frac{43}{\sqrt{58 \times 57}} = \frac{43}{\sqrt{3306}} \approx \frac{43}{57.4978...} \approx 0.74785...$$

$\widehat{ADB} = \arccos(0.74785...) \approx 41.59^\circ$. **Conclusion : La mesure de l'angle $\widehat{ADB}$ arrondie au degré près est $\boxed{42^\circ}$.**