Exercice 1 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- les points $A(0\,;\,1\,;\,1)$ et $B(-2\,;\,2\,;\,-1)$.
- la droite D de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$, $(t \in \mathbb{R})$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. (a) Montrer que les droites (AB) et D ne sont pas parallèles.
   (b) Montrer que les droites (AB) et D ne sont pas sécantes.

Dans la suite, la lettre u désigne un nombre réel.
On considère le point M de la droite D de coordonnées $(-2+u\,;\,1+u\,;\,-1-u)$.

3. Vérifier que le plan P d'équation $x + y - z - 3u = 0$ est orthogonal à la droite D et passe par le point M.
4. Montrer que le plan P et la droite (AB) sont sécants en un point N de coordonnées $(-4+6u\,;\,3-3u\,;\,-1)$.
5. (a) Montrer que la droite (MN) est perpendiculaire à la droite D.
   (b) Existe-t-il une valeur du nombre réel u pour laquelle la droite (MN) est perpendiculaire à la droite (AB) ?
6. (a) Exprimer MN^2 en fonction de u.
   (b) En déduire la valeur du réel u pour laquelle la distance MN est minimale.

Exercice 2 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormal où l'on considère :

- les points $A(2\,;\,-1\,;\,0)$, $B(1\,;\,0\,;\,-3)$, $C(6\,;\,6\,;\,1)$ et $E(1\,;\,2\,;\,4)$;
- Le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x - y - z + 4 = 0$.

1. (a) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
   (b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ puis les longueurs BA et BC.
   (c) En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré.
2. (a) Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (ABC).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (ABC) et passant par le point E.

(d) Démontrer que le projeté orthogonal H du point E sur le plan (ABC) a pour coordonnées $\left(4\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{5}{2}\right)$.

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $V = \dfrac{1}{3}\mathcal{B}h$ où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur de la pyramide associée à cette base.
   Calculer l'aire du triangle ABC puis démontrer que le volume de la pyramide $ABCE$ est égal à 16,5 unités de volume.

Exercice 3 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points suivants : $A(0\,;\,3\,;\,-1)$, $B(4\,;\,1\,;\,2)$, $C(3\,;\,-1\,;\,7)$ et $D(0\,;\,6\,;\,6)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C puis calculer son aire.
3. Soit $\vec{n}(1\,;\,-1\,;\,2)$ un vecteur de l'espace.
   (a) Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal de (ABC).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   (c) Le point D appartient-il au plan (ABC) ?
4. Soit d la droite orthogonale à (ABC) passant par D.
   (a) Donner une représentation paramétrique de d.
   (b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection H de la droite d avec le plan (ABC).
5. (a) Calculer la valeur exacte de la distance DH.
   (b) En déduire la valeur exacte du volume du tétraèdre $ABCD$.
6. Calculer une mesure de l'angle $\widehat{ADB}$ arrondie au degré près.