Exercice 1

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,i\,,\,j\,,\,k)$. On considère les points $A(1\,;\,-2\,;\,-1)$ et $B(3\,;\,-5\,;\,-2)$.

1. **Droite** (d_1)

   a) **Montrer la représentation paramétrique de** (d_1)
   La droite (d_1) passe par le point $A(1\,;\,-2\,;\,-1)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ -5-(-2) \\ -2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   Un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient à la droite (d_1) si et seulement si $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ pour un réel k.

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-(-2) \\ z-(-1) \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x-1 = 2k \\ y+2 = -3k \\ z+1 = -k \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1+2k \\ y = -2-3k\,, \quad k \in \mathbb{R} \\ z = -1-k \end{cases}$$

   En posant $k = t$, on retrouve bien la représentation paramétrique donnée : $\boxed{\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-3t \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -1-t \end{cases}}$.

   b) **Le point** $C(-2\,;\,2{,}5\,;\,1)$ **appartient-il à** (d_1) **?**
   Le point C appartient à (d_1) s'il existe un réel t tel que ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} -2 = 1+2t & (L1) \\ 2{,}5 = -2-3t & (L2) \\ 1 = -1-t & (L3) \end{cases}$$

   De (L1) : $2t = -2-1 = -3 \implies t = -3/2 = -1{,}5$. Vérifions dans (L2) : $-2-3t = -2-3(-1{,}5) = -2+4{,}5 = 2{,}5$. L'équation (L2) est vérifiée. Vérifions dans (L3) : $-1-t = -1-(-1{,}5) = -1+1{,}5 = 0{,}5$. Or, la coordonnée z de C est 1. Puisque $0{,}5 \neq 1$, l'équation (L3) n'est pas vérifiée. Il n'existe pas de valeur unique de t pour laquelle les coordonnées de C vérifient le système.
   Conclusion : Le point C n'appartient pas à la droite (d_1)**.**

2. **Intersection des droites** (d_1) **et** (d_2)

   Représentation de (d_1) : $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-3t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = -1-t \end{cases}$

Représentation de (d_2) : $\begin{cases} x = r \\ y = 7 - 3r \\ z = -8 + r \end{cases}, r \in \mathbb{R}$.

Un point $E(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient à l'intersection de (d_1) et (d_2) si ses coordonnées vérifient les deux systèmes simultanément. On cherche donc $t, r \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} 1 + 2t = r & (E1) \\ -2 - 3t = 7 - 3r & (E2) \\ -1 - t = -8 + r & (E3) \end{cases}$$

Substituons r de (E1) dans (E2) : $-2-3t = 7-3(1+2t)$ $-2-3t = 7-3-6t$ $-2-3t = 4-6t$ $-2-4 = -6t+3t$ $-6 = -3t \implies t = 2$. Calculons r en utilisant (E1) : $r = 1+2t = 1+2(2) = 5$. Vérifions si ces valeurs $(t = 2, r = 5)$ satisfont l'équation (E3) : Membre de gauche : $-1-t = -1-2 = -3$. Membre de droite : $-8+r = -8+5 = -3$. L'équation (E3) est vérifiée. Le système admet une solution unique $(t = 2, r = 5)$. Les droites sont sécantes. Calculons les coordonnées du point d'intersection E en utilisant $t = 2$ dans le système de (d_1) : $x_E = 1 + 2(2) = 5$ $y_E = -2 - 3(2) = -2 - 6 = -8$ $z_E = -1 - (2) = -3$

Conclusion : Les coordonnées du point d'intersection E sont $\boxed{E(5\,;\,-8\,;\,-3)}$.

3. **Coplanarité des droites (d_1) et (d_3)**

Représentation de (d_1) : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Vecteur directeur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Représentation de (d_3) : $\begin{cases} x = 2 - s \\ y = -1 + 2s \\ z = -s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$. Vecteur directeur $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Étape 1 : Parallélisme

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires ? Cherchons k tel que $\vec{w} = k\vec{u}$. $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \implies$

$\begin{cases} -1 = 2k \implies k = -1/2 \\ 2 = -3k \implies k = -2/3 \\ -1 = -k \implies k = 1 \end{cases}$. Les valeurs de k sont différentes. Les vecteurs ne sont pas colinéaires. Les droites ne sont pas parallèles.

Étape 2 : Intersection

Cherchons s'il existe $t, s \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} 1 + 2t = 2 - s & (E1) \\ -2 - 3t = -1 + 2s & (E2) \\ -1 - t = -s & (E3) \end{cases}$$

De (E3) : $s = 1 + t$. Substituons s dans (E1) : $1 + 2t = 2 - (1 + t)$ $1 + 2t = 2 - 1 - t$ $1 + 2t = 1 - t$ $3t = 0 \implies t = 0$. Calculons s : $s = 1 + t = 1 + 0 = 1$. Vérifions si $(t = 0, s = 1)$ satisfait l'équation (E2) : Membre de gauche : $-2 - 3t = -2 - 3(0) = -2$. Membre de droite : $-1 + 2s = -1 + 2(1) = -1 + 2 = 1$. Comme $-2 \neq 1$, l'équation (E2) n'est pas vérifiée. Le système n'a pas de solution. Les droites ne sont pas sécantes.
Conclusion : Les droites (d_1) et (d_3) ne sont ni parallèles ni sécantes, elles sont donc $\boxed{\text{non coplanaires}}$.

4. **Intersection de (d_1) avec le plan P**
   Le plan $(O\,;\,i\,;\,j)$ est le plan d'équation $z = 0$. Un plan P parallèle au plan d'équation $z = 0$ a une équation de la forme $z = k$. Le plan P passe par le point $F(0\,;\,0\,;\,4)$. Ses coordonnées doivent vérifier l'équation $z = k$. $4 = k$. Donc, une équation cartésienne du plan P est $z = 4$. On cherche le point d'intersection de la droite (d_1) et du plan P. Les coordonnées (x, y, z) du point d'intersection doivent vérifier le système paramétrique de (d_1) et l'équation du plan P.

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \\ z = 4 \end{cases}$$

   En utilisant les deux dernières équations : $-1 - t = 4 \implies -t = 5 \implies t = -5$. Il existe une unique valeur de t, donc un unique point d'intersection. Calculons ses coordonnées en remplaçant t par -5 dans les équations de (d_1) : $x = 1 + 2(-5) = 1 - 10 = -9$. $y = -2 - 3(-5) = -2 + 15 = 13$. $z = -1 - (-5) = -1 + 5 = 4$ (ce qui est cohérent avec l'équation du plan).
   Conclusion : Le point d'intersection de (d_1) et P a pour coordonnées $\boxed{(-9\,;\,13\,;\,4)}$.

Exercice 2

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,i\,,\,j\,,\,k)$. On considère les points $A(1\,;\,2\,;\,-1)$, $B(2\,;\,-1\,;\,1)$, $C(2\,;\,-1\,;\,3)$ et $D(3\,;\,-1\,;\,1)$. Les représentations paramétriques des droites d et d' sont données.

Droite d : $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -3t - 2 \\ z = 2t + 4 \end{cases}$ $, t \in \mathbb{R}$ et Droite d' : $\begin{cases} x = 2 + t' \\ y = 1 - t' \\ z = 1 + 4t' \end{cases}$ $, t' \in \mathbb{R}$

1. **Affirmation : Les droites d et (AB) sont parallèles.**

   Un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d a pour coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de la droite (AB) est le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ -1-2 \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont égaux, donc colinéaires ($\vec{u} = 1 \times \overrightarrow{AB}$). Par conséquent, les droites d et (AB) sont parallèles.
Conclusion : L'affirmation 1 est $\boxed{\textbf{VRAIE}}$.

2. **Affirmation : La droite d' est parallèle au plan (ABC).**

   Un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite d' est $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   Le plan (ABC) est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}$. Calculons $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ -1-2 \\ 3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   Vérifions si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires : existe-t-il k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$? $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \implies$ $\begin{cases} 1 = k \times 1 \implies k = 1 \\ -3 = k \times (-3) \implies k = 1 \\ 4 = k \times 2 \implies k = 2 \end{cases}$. Incohérence ($k = 1$ et $k = 2$). Les vecteurs ne sont pas colinéaires et définissent bien le plan (ABC).
   La droite d' est parallèle au plan (ABC) si $\vec{v}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{v} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a + b = 1 & (L1) \\ -3a - 3b = -1 & (L2) \\ 2a + 4b = 4 & (L3) \end{cases}$$

   De (L1), $a+b = 1$. Multiplions par -3 : $-3a-3b = -3$. Or, l'équation (L2) est $-3a-3b = -1$. Comme $-3 \neq -1$, le système est impossible. Il n'existe pas de réels a et b. Le vecteur $\vec{v}$ n'est pas coplanaire aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. La droite d' n'est pas parallèle au plan (ABC).
   Conclusion : L'affirmation 2 est $\boxed{\textbf{FAUSSE}}$.

3. **Affirmation : D appartient à la droite d'.**

Le point $D(3\,;\,-1\,;\,1)$ appartient à d' s'il existe $t' \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} 3 = 2 + t' \\ -1 = 1 - t' \\ 1 = 1 + 4t' \end{cases}$$

La première équation donne $t' = 3 - 2 = 1$. Vérifions dans la deuxième : $1 - t' = 1 - 1 = 0$. Or l'ordonnée de D est -1. Comme $0 \neq -1$, la deuxième équation n'est pas vérifiée. Il n'existe pas de tel t'.

Conclusion : L'affirmation 3 est $\boxed{\text{FAUSSE}}$.

4. **Affirmation :** $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ **est un repère de l'espace.**

   Cela revient à vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$. Calculons $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}x_D - x_A\\ y_D - y_A\\ z_D - z_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-1\\ -1-2\\ 1-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$$

   Les vecteurs sont coplanaires s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix} \iff \begin{cases} a + b = 2 & (L1) \\ -3a - 3b = -3 & (L2) \\ 2a + 4b = 2 & (L3) \end{cases}$$

   De (L1), $a + b = 2$. L'équation (L2) s'écrit $-3(a+b) = -3$. En remplaçant $a + b$ par 2, on obtient $-3(2) = -3$, soit $-6 = -3$. C'est impossible. Le système n'a pas de solution. Les vecteurs ne sont pas coplanaires.

   Conclusion : L'affirmation 4 est $\boxed{\text{VRAIE}}$.

5. **Affirmation : Les droites d et (AD) sont coplanaires.**

   Deux droites sont coplanaires si elles sont parallèles ou sécantes. Vecteur directeur de d : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$.

   Vecteur directeur de (AD) : $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$. Parallélisme : Vérifions si $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires. Cher-

chons k tel que $\overrightarrow{AD} = k\vec{u}$. $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 2 = k \times 1 \implies k = 2 \\ -3 = k \times (-3) \implies k = 1 \\ 2 = k \times 2 \implies k = 1 \end{cases}$. Incohérence ($k = 2$ et $k = 1$). Les vecteurs ne sont pas colinéaires, les droites ne sont pas parallèles.
Intersection : Cherchons s'il existe $t, k \in \mathbb{R}$ tels que : Représentation de d : $M(t+1\,;\,-3t-2\,;\,2t+4)$. Représentation de (AD) : $N(1+2k\,;\,2-3k\,;\,-1+2k)$. On résout :

$$\begin{cases} t+1 = 1+2k & (E1) \\ -3t-2 = 2-3k & (E2) \\ 2t+4 = -1+2k & (E3) \end{cases}$$

De (E1) : $t = 2k$. Substituons dans (E2) : $-3(2k) - 2 = 2 - 3k \implies -6k - 2 = 2 - 3k \implies -4 = 3k \implies k = -4/3$. Alors $t = 2k = -8/3$. Vérifions dans (E3) : Membre de gauche : $2t + 4 = 2(-8/3) + 4 = -16/3 + 12/3 = -4/3$. Membre de droite : $-1 + 2k = -1 + 2(-4/3) = -1 - 8/3 = -3/3 - 8/3 = -11/3$. Puisque $-4/3 \neq -11/3$, l'équation (E3) n'est pas satisfaite. Le système n'a pas de solution. Les droites ne sont pas sécantes.

Les droites d et (AD) ne sont ni parallèles ni sécantes, elles ne sont donc pas coplanaires.
Conclusion : L'affirmation 5 est $\boxed{\textbf{FAUSSE}}$.