

Exercice 1 — Sous-ensembles, permutations et 2-uplets

Données : $E = \{x, y, z, t\}$, donc $|E| = 4$.

- 1) **Sous-ensembles de E .** Le nombre total de parties est $2^{|E|} = 2^4 = \boxed{16}$. Sous-ensembles de cardinal 2 (combinaisons) : $\binom{4}{2} = 6$ ensembles :

$$\boxed{\{x, y\}, \{x, z\}, \{x, t\}, \{y, z\}, \{y, t\}, \{z, t\}}.$$

- 2) **Sous-ensembles de cardinal 3.** Nombre : $\binom{4}{3} = \boxed{4}$. Les ensembles sont :

$$\boxed{\{x, y, z\}, \{x, y, t\}, \{x, z, t\}, \{y, z, t\}}.$$

- 3) **Permutations de E .** Nombre : $4! = \boxed{24}$ (on ne les liste pas).

- 4) **2-uplets ordonnés sans répétition.** Ce sont des *arrangements* de 2 parmi 4 : $A_4^2 = 4 \times 3 = \boxed{12}$.

Exemples : $\boxed{(x, y), (z, t), (t, x)}$.

Exercice 2 — Formation d'un groupe mixte

Données : 8 femmes (F), 7 hommes (H), ensemble de 15 personnes. Groupes non ordonnés de 5 personnes.

- 1) **Nombre total de groupes.** $\binom{15}{5} = \boxed{3003}$.

- 2) **Groupes ne comportant que des hommes.** $\binom{7}{5} = \boxed{21}$.

- 3) **Groupes d'un seul sexe.** Hommes seuls $\binom{7}{5} = 21$ ou femmes seules $\binom{8}{5} = 56$. Total : $\boxed{21 + 56 = 77}$.

- 4) **Groupes avec au moins une femme et au moins un homme.** Par complément : $\binom{15}{5} - 77 = \boxed{3003 - 77 = 2926}$.