

Exercice 1 – Fermetures hebdomadaires

Données. 5 cafés, 7 jours (lun→dim).

- 1) **Sans contrainte.** 5-uplets (avec remise) : $7^5 = \boxed{16807}$.
- 2) **Tous des jours distincts.** Arrangements : $A_7^5 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = \boxed{2520}$.
- 3) **Aucun jour totalement fermé.** $7^5 - 7 = \boxed{16800}$.

Exercice 2 – Comités dans une équipe mixte

Données. 5 femmes (F), 4 hommes (H) \Rightarrow 9 personnes. Comités de 4.

- 1) Total : $\binom{9}{4} = \boxed{126}$.
- 2) 2F-2H : $\binom{5}{2} \binom{4}{2} = \boxed{60}$.
- 3) Au moins 3F : $\binom{5}{3} \binom{4}{1} + \binom{5}{4} = \boxed{45}$.
- 4) Nora et Léo ensemble : $\binom{7}{2} = \boxed{21}$.
- 5) Nora et Léo séparés : $\binom{9}{4} - \binom{7}{2} = \boxed{105}$.

Exercice 3 – Jeu de 52 cartes (tirage simultané de 5 cartes)

- 1) Total : $\binom{52}{5} = \boxed{2\,598\,960}$.
- 2) 5 cœurs **ou** au moins 4 piques (évts disjoints) :

$$\binom{13}{5} + \left(\binom{13}{4} \binom{39}{1} + \binom{13}{5} \right) = \boxed{29\,172}$$

- 3) Exactement 2 carreaux et 1 trèfle (les 2 autres dans {cœur, pique}) :

$$\binom{13}{2} \binom{13}{1} \binom{26}{2} = \boxed{329\,550}$$

- 4) Au moins un As : $\binom{52}{5} - \binom{48}{5} = \boxed{886\,656}$.
- 5) Exactement 2 Rois et exactement 3 cartes noires :

$$\binom{24}{3} + 5 \binom{24}{2} \binom{24}{1} = \boxed{35\,144}$$

Exercice 4 – Urne de 20 jetons (4 couleurs)

Données. 20 jetons distincts : 4 blancs (B), 7 rouges (R), 6 verts (V), 3 noirs (N).

(a) Tirage simultané de 5 jetons

a) Total : $\binom{20}{5} = \boxed{15\,504}$.

b) 5 R : $\binom{7}{5} = \boxed{21}$.

c) 2 B et 3 V : $\binom{4}{2} \binom{6}{3} = \boxed{120}$.

d) Exactement 2 R et 1 N (les 2 autres dans $\{B, V\}$) :

$$\binom{7}{2} \binom{3}{1} \binom{10}{2} = \boxed{2\,835}.$$

(b) Tirage successif sans remise (5-uplets ordonnés)

a) Total : $A_{20}^5 = 20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 = \boxed{1\,860\,480}$.

b) Séquence (R, N, R, V, B) :

$$7 \times 3 \times 6 \times 6 \times 4 = \boxed{3\,024}.$$

c) Exactement 2 R, 1 N, 1 V, 1 B (ordre quelconque) :

$$\binom{7}{2} \binom{3}{1} \binom{6}{1} \binom{4}{1} \times 5! = \boxed{181\,440}.$$

(c) Tirage successif avec remise (5-uplets ordonnés)

a) Total : $20^5 = \boxed{3\,200\,000}$.

b) Uniquement des N : $3^5 = \boxed{243}$.

c) Au moins un V : $20^5 - 14^5 = \boxed{2\,662\,176}$.