Exercice 1 : Étude de fonction exponentielle

Partie A

1. **Signe de $P(x)$:** $P(x) = x^2 + 4x + 2$. C'est un trinôme du second degré.

   $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 2 = 16 - 8 = 8 > 0$.

   Les racines sont $x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{8}}{2} = -2 - \sqrt{2}$ et $x_2 = -2 + \sqrt{2}$.

   Le polynôme est du signe de $a = 1$ (positif) à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Soit $g(x) = xe^x(x+2) - 2 = (x^2 + 2x)e^x - 2$.

   (a) **Limites de g :**

   - En $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 + 2x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

     Par produit et somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$.
   - En $-\infty$: On développe $g(x) = x^2e^x + 2xe^x - 2$. On sait que par croissances comparées $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^x = 0$. Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -2}$.

   Interprétation graphique : La droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_g$ au voisinage de $-\infty$.

   (b) **Dérivée $g'(x)$:** g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit de fonctions dérivables.

   $g(x) = (x^2+2x)e^x - 2$. On pose $u(x) = x^2+2x$ et $v(x) = e^x$. $g'(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x)e^x = (x^2 + 4x + 2)e^x$.

   On reconnaît $P(x)$, d'où : $\boxed{g'(x) = P(x)e^x}$.

   Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, $g'(x)$ est du même signe que $P(x)$.

   (c) **Tableau de variations de g :** Les racines de g' sont celles de P.

   On calcule les valeurs approchées des extremums pour vérifier la cohérence :

   $x_1 \approx -3,41$ et $x_2 \approx -0,59$.

   $g(x_1) \approx -2,16$ (maximum local) et $g(x_2) \approx -2,47$ (minimum local).

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	-2	$\nearrow$	$g(x_1) < 0$	$\searrow$	$g(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Note : Le maximum local $g(-2-\sqrt{2})$ est strictement inférieur à 0 (environ $-2,16$).

(d) **Existence de α :**

- Sur $]-\infty\,;\,-2+\sqrt{2}]$, le maximum de la fonction est $g(-2-\sqrt{2}) \approx -2,16 < 0$. L'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution.
- Sur $[-2+\sqrt{2}\,;\,+\infty[$, g est continue et strictement croissante. $g(-2+\sqrt{2})$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$.

À la calculatrice, on trouve : $\boxed{0,556 < \alpha < 0,558}$.

(e) **Signe de g :** g est négative sur $]-\infty\,;\,\alpha[$ et positive sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

Partie B

1. **Limites de f :** $f(x) = x^2e^x - 2x = x(xe^x - 2)$.
   - En $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x = -\infty$. Forme indéterminée.

     Factorisons par e^x (croissance comparée) ou simplement par le terme dominant.

     $f(x) = x^2e^x(1 - \frac{2}{xe^x})$. Comme $\lim \frac{2}{xe^x} = 0$, on a $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.
   - En $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$ (croissance comparée) et $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x = +\infty$. Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$.

2. (a) **Expression de $f(\alpha)$:** On sait que $g(\alpha) = 0 \iff (\alpha^2 + 2\alpha)e^\alpha - 2 = 0 \iff e^\alpha = \dfrac{2}{\alpha(\alpha+2)}$.

   En remplaçant dans $f(\alpha) = \alpha^2e^\alpha - 2\alpha$:

$$f(\alpha) = \alpha^2 \times \frac{2}{\alpha(\alpha+2)} - 2\alpha = \frac{2\alpha}{\alpha+2} - 2\alpha$$

$$f(\alpha) = 2\alpha\left(\frac{1}{\alpha+2} - 1\right) = 2\alpha\left(\frac{1-(\alpha+2)}{\alpha+2}\right) = 2\alpha\left(\frac{-1-\alpha}{\alpha+2}\right)$$

$$\boxed{f(\alpha) = -2\alpha\left(\frac{1+\alpha}{2+\alpha}\right)}$$

   (b) **Encadrement :** Avec $\alpha \approx 0,557$, on utilise l'expression précédente pour obtenir un encadrement précis : $\boxed{-0,68 < f(\alpha) < -0,67}$.

3. **Dérivée de f :** $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x - 2 = (x^2+2x)e^x - 2$. On remarque que $\boxed{f'(x) = g(x)}$.
4. **Tableau de variations de f :** Le signe de f' est celui de g (étudié en Partie A, question 2e).

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

5. **Asymptote oblique :** Étudions la limite de la différence $d(x) = f(x) - (-2x)$ en $-\infty$.

$d(x) = x^2e^x - 2x + 2x = x^2e^x$. On sait que $\lim_{x \to -\infty} x^2e^x = 0$.

Donc la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

6. **Convexité :** On étudie le signe de la dérivée seconde $f''(x)$. Or $f'(x) = g(x)$, donc $f''(x) = g'(x)$. D'après la partie A, $g'(x) = P(x)e^x$. Le signe de f'' est celui de $P(x)$ (positif à l'extérieur des racines).

   - Sur $]-\infty\,;\,-2-\sqrt{2}] \cup [-2+\sqrt{2}\,;\,+\infty[$, f est convexe.
   - Sur $[-2-\sqrt{2}\,;\,-2+\sqrt{2}]$, f est concave.

   Les points d'inflexion sont les points où f'' s'annule et change de signe, soit pour $x = -2-\sqrt{2}$ et $x = -2+\sqrt{2}$.
7. **Tracé :** (Non représenté ici, mais à faire sur la copie avec l'asymptote et les extrema).

Exercice 2 : QCM

1. **Réponse A.** $f(x) = 1 + (x-5)e^{0,2x}$.

   $f'(x) = 1 \cdot e^{0,2x} + (x-5) \times 0,2e^{0,2x} = e^{0,2x}(1 + 0,2x - 1) = 0,2xe^{0,2x}$.

   $f''(x) = 0,2e^{0,2x} + 0,2x \times 0,2e^{0,2x} = 0,2e^{0,2x}(1+0,2x) = \frac{1}{5}e^{0,2x}\left(1+\frac{x}{5}\right) = \boxed{\frac{x+5}{25}e^{0,2x}}$.
2. **Réponse D.** Les variations de f' dépendent du signe de $f''(x)$. $f''(x)$ est du signe de $x+5$.

   Donc f' est décroissante sur $[-10\,;\,-5]$ et croissante sur $[-5\,;\,10]$.

   L'intervalle $[-5\,;\,5]$ est inclus dans l'intervalle de croissance.
3. **Réponse D.** La convexité de f dépend du signe de $f''(x)$. $f''(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant -5$. f est convexe sur $[-5\,;\,10]$. L'intervalle $[-5\,;\,5]$ y est inclus.
4. **Réponse A et D.** Sur $[0\,;\,5]$, la fonction est convexe (car $0 > -5$). Par définition de la convexité :
   - La courbe est au-dessus de ses tangentes (Réponse A).
   - La courbe est en dessous de ses cordes (Réponse D).
5. **Réponse D.** Un point d'inflexion correspond à un changement de signe de la dérivée seconde. $f''(x)$ s'annule et change de signe en $x = -5$.

Exercice 3 : Fonction rationnelle

Partie A

1. **Variations de g :** $g(x) = x^3 - 3x - 4$. $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. Racines de la dérivée : -1 et 1. Signe de $a = 3$ (positif) à l'extérieur. $g(-1) = -1 + 3 - 4 = -2$. $g(1) = 1 - 3 - 4 = -6$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

2. **Théorème des valeurs intermédiaires :** Sur $]-\infty\,;\,1]$, le maximum est -2, donc $g(x) < 0$. Pas de solution.

   Sur $[1\,;\,+\infty[$, g est continue et strictement croissante. $g(1) = -6$ et la limite est $+\infty$.

   $0 \in [-6\,;\,+\infty[$, donc il existe un unique α tel que $g(\alpha) = 0$.

   Vérification sur l'intervalle donné : $g(2,1) = 2,1^3 - 3(2,1) - 4 = 9,261 - 6,3 - 4 = -1,039 < 0$.
   $g(2,2) = 2,2^3 - 3(2,2) - 4 = 10,648 - 6,6 - 4 = 0,048 > 0$.

   Donc $\alpha \in]2,1\,;\,2,2[$.
3. **Valeur approchée :** À la calculatrice, $\boxed{\alpha \approx 2,20}$.
4. **Signe de g :** g est négative sur $]-\infty\,;\,\alpha[$ et positive sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

Partie B

1. **Limites de f :** $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$.
   - En $\pm\infty$: Termes de plus haut degré : $\lim \dfrac{x^3}{x^2} = \lim x$. Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.
   - En 1 : $x^3 + 2x^2 \to 3$. $x^2 - 1 \to 0$. Signe de $x^2 - 1$: négatif entre -1 et 1, positif à l'extérieur.
     $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \dfrac{3}{0^-} = -\infty$. $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \dfrac{3}{0^+} = +\infty$.
   - En -1 : $x^3 + 2x^2 \to 1$. $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$. $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$.
2. **Dérivée :** $f'(x) = \dfrac{(3x^2 + 4x)(x^2 - 1) - (x^3 + 2x^2)(2x)}{(x^2 - 1)^2}$ Numérateur : $3x^4 - 3x^2 + 4x^3 - 4x - (2x^4 + 4x^3) = x^4 - 3x^2 - 4x = x(x^3 - 3x - 4) = xg(x)$. Donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}}$.
3. **Tableau de variations :** Le signe de f' dépend du signe de x et de $g(x)$.
   - x change de signe en 0.
   - $g(x)$ change de signe en α (env. 2,2).

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. (a) **Forme décomposée :** $x+2+\dfrac{x+2}{x^2-1} = \dfrac{(x+2)(x^2-1)+x+2}{x^2-1} = \dfrac{x^3-x+2x^2-2+x+2}{x^2-1} = \dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1} = f(x)$.

   (b) **Asymptote oblique :** $f(x)-(x+2) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+2}{x^2-1} = \lim \dfrac{x}{x^2} = 0$.

   Donc la droite $y = x+2$ est asymptote oblique en $\pm\infty$.

   (c) **Position relative :**

   On étudie le signe de la différence $d(x) = f(x)-(x+2) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$.

   - $x+2$ s'annule en -2.
   - x^2-1 s'annule en -1 et 1.

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
Signe de $x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de x^2-1		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Signe de $d(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

Conclusion :

- Sur $]-\infty\,;\,-2[$ et sur $]-1\,;\,1[$, la différence est négative : $\mathscr{C}_f$ est **en dessous** de l'asymptote.
- Sur $]-2\,;\,-1[$ et sur $]1\,;\,+\infty[$, la différence est positive : $\mathscr{C}_f$ est **au-dessus** de l'asymptote.
- La courbe coupe l'asymptote au point d'abscisse $x=-2$.

Exercice 4 : Continuité en 0

Pour qu'une fonction soit continue en 0, il faut que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

1. $f(0) = 0$.

   Limite à gauche ($x < 0$) : $\lim\limits_{x \to 0^-} (2x+1) = 1$.

   Comme $1 \neq f(0)$, la fonction n'est **pas continue** en 0.

2. $g(0) = 0$. (Définie pour $x \geqslant 0$).

   Pour $x > 0$, $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$. $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0 = g(0)$.

   La fonction est **continue** en 0 (continuité à droite).

3. $h(0) = 1$.

   Pour $x > 0$, $h(x) = \dfrac{x}{x} = 1$. Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = 1$.

   Pour $x < 0$, $h(x) = \dfrac{-x}{x} = -1$. Donc $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = -1$.

   Les limites gauche et droite sont différentes, la fonction n'est **pas continue** en 0.