

Exercice 1

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^x - 2x.$$

Partie A

1. Soit P la fonction polynôme de degré deux définie par $P(x) = x^2 + 4x + 2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Donner le tableau de signe de P sur \mathbb{R} .
2. Soit g la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x(x + 2) - 2$.
 - (a) Calculer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire sur C_g ?
 - (b) Montrer que $g'(x) = P(x)e^x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que g' et P ont le même signe sur \mathbb{R} .
 - (c) Construire le tableau complet de variations de g sur \mathbb{R} .
 - (d) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(\alpha) = 0$. Donner un encadrement de α à 10^{-3} près.
 - (e) Quel est le signe de g sur \mathbb{R} ?

Partie B

1. Donner les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. (a) Montrer que $f(\alpha) = -2\alpha \times \left(\frac{1+\alpha}{2+\alpha} \right)$.
(b) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
3. Calculer la dérivée f' de f sur \mathbb{R} . Que remarque-t-on ?
4. En déduire le tableau complet de variations de f sur \mathbb{R} .
5. Montrer que la droite D d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à C_f .
6. Étudier la convexité de f sur \mathbb{R} et donner les éventuels points d'inflexions.
7. Tracer D et C_f dans un repère de votre choix.

Exercice 2

Cet exercice est un QCM, donner, en justifiant, les éventuelles bonnes réponses possibles.

On considère la fonction f définie pour tout $x \in [-10 ; 10]$ par :

$$f(x) = 1 + (x - 5)e^{0,2x}.$$

1. La dérivée seconde de f sur $[-10 ; 10]$ est :

- | | |
|---|--|
| a) $f''(x) = \frac{(x + 5)e^{0,2x}}{25}$
c) $f''(x) = (x - 5)e^{0,2x}$ | b) $f''(x) = \frac{xe^{0,2x}}{5}$
d) $f''(x) = 0$ |
|---|--|

2. La fonction f' est :

- | | |
|---|---|
| a) décroissante sur $[-5 ; 0]$.
c) croissante sur $[-10 ; 5]$. | b) décroissante sur $[-10 ; 0]$.
d) croissante sur $[-5 ; 5]$. |
|---|---|

3. La fonction f est :

- | | |
|---|---|
| a) concave sur $[-5 ; 0]$.
c) convexe sur $[-10 ; 5]$. | b) concave sur $[-10 ; 0]$.
d) convexe sur $[-5 ; 5]$. |
|---|---|

4. Sur $[0 ; 5]$, C_f est :

- a) au-dessus de ses tangentes.
- b) au-dessus de ses sécantes (ou cordes).
- c) en dessous de ses tangentes.
- d) en dessous de ses sécantes (ou cordes).

5. C_f admet un point d'inflexion d'abscisse égale à :

- | | |
|-----------------|-----------------|
| a) 5.
c) 10. | b) 0.
d) -5. |
|-----------------|-----------------|

Exercice 3

Partie A : Une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. Étudier les variations de g , donner son tableau de variations complet.
2. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in]2, 1 ; 2, 2[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
3. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4. Étudier le signe de g sur \mathbb{R} .

Partie B : La fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}, f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}.$$

3. En déduire le tableau de variations complet de f .
4. (a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}, f(x) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2 - 1}.$$

- (b) Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $-\infty$ et $+\infty$.
- (c) Étudier la position de la courbe représentative de f avec la droite d'équation $y = x + 2$.

Exercice 4

Déterminer si les fonctions suivantes sont continues en 0 :

$$1. f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^4 + 5x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$2. g(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$3. h(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$