Exercice 1 : Étude de continuité et dérivabilité

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x<2 \\ 1 & \text{si } x=2 \\ (x-1)^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

1. Continuité sur $\mathbb{R}$:

- Sur $]-\infty\,;2[$, la fonction $x \mapsto 2x-3$ est affine, donc continue.
- Sur $]2\,;+\infty[$, la fonction $x \mapsto (x-1)^2$ est polynomiale, donc continue.
- **Étude en $x=2$:** Calculons les limites à gauche et à droite :

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (2x-3) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x-1)^2 = 1$$

  Puisque $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$ et que $f(2)=1$, on a $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$. La fonction f est donc continue en 2.

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Dérivabilité sur $\mathbb{R}$:

- Sur $]-\infty\,;2[$ et $]2\,;+\infty[$, f est dérivable comme fonction usuelle.
- **Étude en $x=2$:** On compare les limites des dérivées (ou les nombres dérivés à gauche et à droite) :
  - À gauche : pour $x<2$, $f'(x)=2$, donc $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = 2$.
  - À droite : pour $x>2$, $f'(x)=2(x-1)$, donc $\lim_{x\to 2^+} f'(x) = 2(2-1) = 2$.

  Les limites à gauche et à droite étant finies et égales, f est dérivable en 2.

Conclusion : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(2)=2$.

Exercice 2 : Étude de fonctions et équations

1. On désigne par g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2$.

   (a) **Étude des variations de g sur $\mathbb{R}$:**
   g est une fonction polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$.

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 12x^2 + 6x = 6x(2x+1)$$

   $g'(x)$ est un trinôme du second degré ayant deux racines : $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = 0$. Le coefficient devant x^2 est positif ($12 > 0$), donc $g'(x)$ est positif à l'extérieur des racines.

   Limites aux bornes (Justification par factorisation) :

   - En $-\infty$: $g(x) = x^3\left(4 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x^3}\right)$.
     Or $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x^3}\right) = 4$. Par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.
   - En $+\infty$: Par un raisonnement analogue, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

   Images des extremums : $g(-0,5) = 4(-0,5)^3 + 3(-0,5)^2 - 2 = -0,5 + 0,75 - 2 = -1,75$.
   $g(0) = -2$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-1,75$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

   (b) **Position relative de $\mathcal{C}_g$ et $(D) : y = x - 2$:**
   On étudie le signe de la différence $d(x) = g(x) - (x-2)$:

   $$d(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2 - x + 2 = 4x^3 + 3x^2 - x = x(4x^2 + 3x - 1)$$

   Le trinôme $4x^2 + 3x - 1$ a pour discriminant $\Delta = 9 - 4(4)(-1) = 25 > 0$. Les racines sont $x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{1}{4}$.

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$4x^2 + 3x - 1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $d(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion : $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de (D) lorsque $d(x) > 0$, c'est-à-dire sur $]-1\,;\,0[\cup]\frac{1}{4}\,;\,+\infty[$.

(c) **Existence et unicité de la solution** $g(x) = 0$ **:**

- Sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0]$, le maximum de la fonction est $-1,75$. L'image de cet intervalle par g est $]-\infty\,;\,-1,75]$. Comme $0 \notin]-\infty\,;\,-1,75]$, l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.
- Sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, la fonction g est continue (polynôme) et strictement croissante. $g(0) = -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. L'image de l'intervalle est $g([0\,;\,+\infty[) = [-2\,;\,+\infty[$. Or $0 \in [-2\,;\,+\infty[$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée a, sur $[0\,;\,+\infty[$.

Conclusion : L'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution a sur $\mathbb{R}$.

(d) **Signe de g sur $\mathbb{R}$:**
Puisque g est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ et s'annule en a :

- Si $x < a$, alors $g(x) < 0$.
- Si $x > a$, alors $g(x) > 0$.

(e) **Valeur approchée :** À la calculatrice, on obtient $\boxed{a \approx 0,61}$.

2. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^3+1}$.

(a) **Ensemble de définition :** f est définie si $x^3 + 1 \neq 0 \iff x^3 \neq -1 \iff x \neq -1$. f est une fonction rationnelle, elle est continue sur son domaine de définition : $D_f =]-\infty\,;\,-1[\cup]-1\,;\,+\infty[$.

(b) **Limites aux bornes :**

- **En $\pm\infty$:** On factorise par les termes de plus haut degré :

$$f(x) = \frac{x(2+\frac{1}{x})}{x^3(1+\frac{1}{x^3})} = \frac{1}{x^2} \times \frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^3}}$$

On a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et la fraction tend vers 2. Donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

- **En -1 :** $\lim\limits_{x\to-1} (2x+1) = -1$. Étudions le signe du dénominateur $x^3 + 1$.
  - Si $x < -1$, $x^3 < -1 \implies x^3 + 1 < 0$ (tend vers 0^-). Donc $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$.
  - Si $x > -1$, $x^3 > -1 \implies x^3 + 1 > 0$ (tend vers 0^+). Donc $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$.

(c) **Tableau de variations :**
Le dénominateur $(x^3+1)^2$ est strictement positif. Le signe de $f'(x)$ est celui de $-g(x)$.

Or, on a vu que $g(x)$ est négatif sur $]-\infty\,;\,a[$ et positif sur $]a\,;\,+\infty[$.

Par conséquent, $f'(x)$ est positif sur $]-\infty\,;\,-1[\cup]-1\,;\,a[$ et négatif sur $]a\,;\,+\infty[$.

x	$-\infty$	-1	a	$+\infty$
$-g(x)$	$+$	‖ $+$	0	$-$
$f'(x)$	$+$	‖ $+$	0	$-$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$	‖ $-\infty \nearrow$	$f(a)$	$\searrow 0$

(d) **Montrer que** $f(a) = \frac{2}{3a^2}$ **:**
On sait que $g(a) = 0 \iff 4a^3 + 3a^2 - 2 = 0 \iff 4a^3 + 3a^2 = 2$. Calculons la différence $f(a) - \frac{2}{3a^2}$:

$$f(a) - \frac{2}{3a^2} = \frac{2a+1}{a^3+1} - \frac{2}{3a^2} = \frac{3a^2(2a+1) - 2(a^3+1)}{3a^2(a^3+1)}$$
$$= \frac{6a^3 + 3a^2 - 2a^3 - 2}{3a^2(a^3+1)} = \frac{4a^3 + 3a^2 - 2}{3a^2(a^3+1)}$$

Or, le numérateur est exactement $g(a)$, qui vaut 0. Donc $f(a) - \frac{2}{3a^2} = 0 \iff f(a) = \frac{2}{3a^2}$.

(e) **Tangente en 0 :** $y = f'(0)(x-0) + f(0)$. $f(0) = \frac{1}{1} = 1$. $f'(0) = \frac{-g(0)}{(0^3+1)^2} = \frac{-(-2)}{1} = 2$.
L'équation est donc $\boxed{y = 2x + 1}$.

Exercice 3 : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. **Variations de** f **:**
f est dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x-1)(x+1)$. Les racines sont -1 et 1.

Limites (par factorisation) :

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}) = -\infty$.
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}) = +\infty$.

Images des extremums locaux : $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3$ et $f(1) = 1^3 - 3(1) + 1 = -1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. **Solutions de $f(x) = 0$:**
   Nous appliquons le corollaire du TVI sur chaque intervalle de monotonie :
   - Sur $]-\infty\,;\,-1]$, f est continue et strictement croissante. $f(]-\infty\,;\,-1]) =]-\infty\,;\,3]$. Comme $0 \in]-\infty\,;\,3]$, il existe une unique solution $\alpha \in]-\infty\,;\,-1]$.
   - Sur $[-1\,;\,1]$, f est continue et strictement décroissante. $f([-1\,;\,1]) = [-1\,;\,3]$. Comme $0 \in [-1\,;\,3]$, il existe une unique solution $\beta \in [-1\,;\,1]$.
   - Sur $[1\,;\,+\infty[$, f est continue et strictement croissante. $f([1\,;\,+\infty[) = [-1\,;\,+\infty[$. Comme $0 \in [-1\,;\,+\infty[$, il existe une unique solution $\gamma \in [1\,;\,+\infty[$.

   Conclusion : L'équation admet exactement trois solutions distinctes α, β, γ.
3. **Encadrement de β :** Nous cherchons $\beta \in [-1\,;\,1]$. $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = -1 < 0$. Donc $\beta \in]0\,;\,1[$. À la calculatrice : $f(0,34) \approx 0,019 > 0$ et $f(0,35) \approx -0,007 < 0$. D'où $\boxed{0,34 < \beta < 0,35}$.
4. **Signe de $f(x)$ sur $]\beta, \gamma[$:**
   β est la solution entre -1 et 1. γ est la solution supérieure à 1.

   Sur l'intervalle $]\beta\,;\,1]$, f est décroissante et s'annule en β, donc $f(x) < 0$.

   Sur l'intervalle $[1\,;\,\gamma[$, f est croissante et s'annule en γ, et le minimum est -1, donc $f(x)$ reste négatif.

   Conclusion : Sur $]\beta\,;\,\gamma[$, $f(x)$ est strictement **négatif**.