Exercice 1 : Limite de la fonction exponentielle (R.O.C.)

Objectif : Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Soit la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = e^x - x$. La fonction g est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $g'(x) = e^x - 1$.

Or, pour tout $x \geq 0$, on sait que la fonction exponentielle est croissante et que $e^0 = 1$, donc $e^x \geq 1$. Par conséquent, $g'(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.

La fonction g est donc croissante sur $[0\,;+\infty[$. Comme $g(0) = e^0 - 0 = 1$, on en déduit que pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq 1$.

Ainsi :

$$e^x - x \geq 1 \iff e^x \geq x + 1$$

En particulier, pour tout $x \geq 0$, $e^x > x$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, d'après le **théorème de comparaison**, on a :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty}$$

Exercice 2 : Limites et Asymptotes

1. **Étude des asymptotes de $f(x) = \dfrac{-5x + 20}{-2x + 10}$ sur $]5\,;+\infty[$:**

   - **Limite en 5 (bornes ouvertes) :**

     $\lim\limits_{x \to 5}(-5x + 20) = -25 + 20 = -5$. $\lim\limits_{x \to 5}(-2x + 10) = 0$.
     Signe du dénominateur : Sur $]5\,;+\infty[$, on a $x > 5 \iff -2x < -10 \iff -2x + 10 < 0$. Le dénominateur tend vers 0 par valeurs négatives (0^-).

     Par quotient : $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x > 5}} f(x) = \dfrac{-5}{0^-} = +\infty$.

     On en déduit que la droite d'équation $\boxed{x = 5}$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$.

   - **Limite en $+\infty$:**

     f est une fonction rationnelle. En l'infini, sa limite est celle du quotient des termes de plus haut degré :

     $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-5x}{-2x} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

     On en déduit que la droite d'équation $\boxed{y = 2,5}$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

2. **Limite de $x^2 + 2x\cos x + 1$ en $+\infty$:**

   On sait que pour tout réel x, $-1 \leq \cos x \leq 1$. Pour $x > 0$, on multiplie par $2x$ (positif) :

   $$-2x \leq 2x\cos x \leq 2x$$

On ajoute x^2+1 :

$$x^2-2x+1 \leq x^2+2x\cos x+1 \leq x^2+2x+1$$

Or, $x^2-2x+1=(x-1)^2$.

On a donc l'inégalité : $f(x) \geq (x-1)^2$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)^2=+\infty$, d'après le **théorème de comparaison** :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(x^2+2x\cos x+1)=+\infty}$$

3. **Limite de $\dfrac{x+2\sin x}{x}$ en $+\infty$:**

   Pour $x\neq 0$, on écrit : $\dfrac{x+2\sin x}{x}=1+\dfrac{2\sin x}{x}$.

   On utilise le théorème des gendarmes. Pour tout $x>0$:

$$-1\leq \sin x\leq 1 \implies -\frac{2}{x}\leq\frac{2\sin x}{x}\leq\frac{2}{x}$$

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{2}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sin x}{x}=0$.

   Par somme :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2\sin x}{x}=1}$$

Exercice 3 : Dérivée seconde

Soit $f(x)=\dfrac{3-x}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Calcul de la dérivée première f' : On pose $u(x)=3-x$ et $v(x)=x+1$. On a $u'(x)=-1$ et $v'(x)=1$.

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}=\frac{-1(x+1)-(3-x)(1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-x-1-3+x}{(x+1)^2}=\frac{-4}{(x+1)^2}$$

Calcul de la dérivée seconde f'' : On peut réécrire $f'(x)=-4(x+1)^{-2}$.

$$f''(x)=-4\times(-2)(x+1)^{-2-1}\times(x+1)'$$

$$f''(x)=8(x+1)^{-3}\times 1=\frac{8}{(x+1)^3}$$

(Méthode alternative via quotient : $U=-4$, $V=(x+1)^2$, $U'=0$, $V'=2(x+1)$...)

$$\boxed{f''(x)=\frac{8}{(x+1)^3}}$$

Exercice 4 : Fonction exponentielle

Soit f définie sur $]-\infty\,;1[$ par $f(x)=(-x+1)e^{-x+1}$.

1. **Limite en $-\infty$:** On pose $X=-x+1$. Quand $x\to-\infty$, alors $X\to+\infty$.

   On a $f(x)=Xe^X$. Or, par propriété de l'exponentielle, $\lim\limits_{X\to+\infty} X=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X=+\infty$. Par produit :

   $$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$$

2. **Limite en 1 :** D'après l'énoncé, on utilise l'écriture $f(x)=\dfrac{1}{\dfrac{e^{x-1}}{-x+1}}$. Simplifions le dénominateur : $\dfrac{e^{x-1}}{-(x-1)}$.

   Quand $x\to1$ avec $x<1$, posons $h=x-1$. Alors $h\to0$ et $h<0$. Le dénominateur est $\dfrac{e^h}{-h}$. On sait que $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$. Mais ici, il est plus simple de voir directement dans l'expression initiale : $f(x)=(-x+1)e^{-x+1}$. Quand $x\to1$:

   - $-x+1\to0$
   - $e^{-x+1}\to e^0=1$

   Par produit :

   $$\boxed{\lim_{x\to1} f(x)=0}$$

3. **Calcul de la dérivée :** f est de la forme $u\times v$ avec $u(x)=-x+1$ et $v(x)=e^{-x+1}$.

   $u'(x)=-1$ et $v'(x)=(-x+1)'e^{-x+1}=-e^{-x+1}$.

   $$\begin{aligned}f'(x)&=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\\&=-1\cdot e^{-x+1}+(-x+1)\cdot(-e^{-x+1})\\&=e^{-x+1}\left[-1-(-x+1)\right]\\&=e^{-x+1}\left[-1+x-1\right]\\&=(x-2)e^{-x+1}\end{aligned}$$

   On obtient bien : $\boxed{f'(x)=(x-2)e^{-x+1}}$

4. **Tableau de variation :**

   Sur $]-\infty\,;1[$, on étudie le signe de $f'(x)$. Comme l'exponentielle e^{-x+1} est toujours strictement positive, le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-2)$.

   Or, on travaille sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$. Pour tout $x<1$, on a $x-2<-1$, donc $x-2$ est négatif.

   Conclusion : $f'(x)<0$ sur tout l'intervalle de définition.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ 1
Signe de $f'(x)$	$-$
Variations de f	$+\infty$ $\searrow$ 0

Exercice 5 : QCM (Justifications)

1. Vrai $f(x) = x^3(-x+1)^2$. f est dérivable comme produit de fonctions polynômes.

$f'(x) = 3x^2(-x+1)^2 + x^3 \times 2(-x+1) \times (-1) = x^2[3(-x+1)^2 - 2x(-x+1)]$.

On remarque que $f'(0) = 0^2 \times [\dots] = 0$.

Le nombre dérivé en 0 est nul, donc la tangente est horizontale.

2. Vrai $g(x) = x\sqrt{x+3}$. Formule $(uv)' = u'v + uv'$.

$u = x, u' = 1$. $v = \sqrt{x+3}, v' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$.

$g'(x) = 1 \cdot \sqrt{x+3} + x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}} = \dfrac{2(x+3)+x}{2\sqrt{x+3}} = \dfrac{3x+6}{2\sqrt{x+3}} = \dfrac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$.

3. Vrai $k(x) = h(2x+3)$. C'est une composée $h(u(x))$. La dérivée est $u'(x) \times h'(u(x))$.

$k'(x) = 2 \times h'(2x+3)$. Or $h'(X) = \dfrac{1}{X^2+1}$. Donc $h'(2x+3) = \dfrac{1}{(2x+3)^2+1}$.

$k'(x) = 2 \times \dfrac{1}{4x^2+12x+9+1} = \dfrac{2}{4x^2+12x+10} = \dfrac{2}{2(2x^2+6x+5)} = \dfrac{1}{2x^2+6x+5}$.

4. Faux $v(x) = (6x^3+1)^8$. Formule $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

$n = 8$. $u(x) = 6x^3 + 1 \implies u'(x) = 18x^2$.

$v'(x) = 8 \times (18x^2) \times (6x^3+1)^7 = 144x^2(6x^3+1)^7$.

La proposition indiquait $24x^2(6x^3+1)^7$, ce qui est incorrect.